CHAPITRE 1 : LES ENSEMBLES ET LES RELATIONS

1. Les ensembles :

1.1. Généralités :

1.1.1. Ensembles :

Définition :

On appelle **ensemble** tout rassemblement d'objets appelés les **éléments** de l'ensemble.

Notations :

Si x est un élément appartenant à l'ensemble E, alors on écrit : $\mathbf{x \in E}$.

Si x est un élément n'appartenant pas à l'ensemble E, alors on écrit : $\mathbf{x \notin E}$.

Exemples :

- L'ensemble des entiers naturels est $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots; n\}$. $0 \in \mathbb{N}$ et $0,5 \notin \mathbb{N}$.
- L'ensemble des points dont le carré est égal à -1 est l'ensemble vide. On le note $\emptyset$ ou { }.

Un ensemble est défini :

→ **en extension**: énumération de ses éléments : Soit E = ensemble des 3 premiers chiffres impairs.

$E=\{1; 3; 5\} = \{1; 5; 3\} = \dots$

(On ne tient pas compte de l'ordre des éléments et on ne tient compte que des éléments différents).

→ **en compréhension:** défini par la propriété qui caractérise ses éléments : « E est l'ensemble des éléments x ayant la propriété P ».

$E=\{x|P\}$

Définition :

Le **cardinal** (noté « **Card** ») correspond au nombre d'éléments d'un ensemble.

Exemples :

- Soit F = ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation 2x=1.
  $F = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et Card F=1. Un ensemble ne possédant qu'un élément est un **singleton**.

- Soit G = ensemble des solutions dans ℝ de l'équation $x^2=1$.
  G= $\{1; -1\}$ et Card G=2. Un ensemble possédant deux éléments est une **paire**.

- Soit H = ensemble des solutions (x,y) du système $\begin{cases} x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases}$.
  H =$\{(1; -1)\}$ et Card H =1. Il s'agit d'un singleton, l'unique élément est un **couple**.

  Attention: ne pas confondre **paire** et **couple**. Dans un couple l'ordre à de l'importance: $\{(1; -1)\} \neq \{(-1; 1)\}$.

- Soit E = ensemble des 3 premiers chiffres impairs.
  E=$\{1; 3; 5\}$ et Card E = 3.

Notations :

Soient une propriété P et un ensemble E.

- Si au moins un élément de l'ensemble E vérifie cette propriété, on note : $\exists \boldsymbol{x} \in$ **E, P(x)**.
  « Il existe **au moins un** élément x… ». Le symbole ∃ est un quantificateur existentiel.

- Si l'élément x vérifiant la propriété P est unique, on note : $\exists!\, x \in$ E, P(x).
  « Il existe **un et un seul** élément x.. ».

- Si tous les éléments de E vérifient la propriété P, on note : $\forall x \in$ E, P(x).
  « **Quel que soit** x… » ou « **Pour tout** x… ». Le symbole ∀ est un quantificateur universel.

- Le connecteur implication : « A⟹B » se lit « A entraîne B » ou « A implique B » ou encore « si A, alors B ».
- Le connecteur « bi-implication: « A⟺B » se lit « A est équivalent à B» ou « A si et seulement si B ».
  (A⟺B) = A⟹B et B⟹ A.

Remarque :

« A⟹B » signifie que si A est vrai, alors B est vraie aussi ; si A est fausse alors on ne peut rien dire sur la vérité de B. On dit alors que A est suffisant (mais non nécessaire) pour B, et B est nécessaire mais non suffisant pour A.

Exemple :

$x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$ est vrai, mais $x^2 = 4 \Longrightarrow x=2$ est fausse ($x=-2$ est aussi une solution)

1.1.2. Sous ensembles et parties d'un ensemble :

Définition :

On dit qu'un ensemble A est un **sous-ensemble** d'un ensemble B si et seulement si tout élément de A appartient à B.
On dit aussi que A est **inclus** dans B ou que A est une **partie** de B.

Notation :

« A est inclus dans B » se note : $\mathbf{A \subset B}$
Avec $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$.

Attention : ne pas confondre les relations suivantes :
« appartient à » : relation entre un **ensemble** et ses **éléments**, symbole « $\in$ ».
« est inclus dans » : relation entre un **ensemble** et ses **sous-ensembles**, symbole « $\subset$ ».

Propriétés :

La relation d'inclusion possède les propriétés suivantes :

- Si deux ensembles sont égaux, ils sont inclus l'un dans l'autre :
  $A \subset B$ et $B \subset A \Leftrightarrow A = B$

- Si un ensemble est inclus dans un autre et que ce dernier est inclus dans le troisième ensemble, alors le premier ensemble est inclus dans le troisième :
  $C \subset D$ et $D \subset E \Leftrightarrow C \subset E$

Exercice 1: (correction en cours)

Ecrire la phrase mathématique suivante : « L'ensemble des entiers naturels est inclus dans l'ensemble des entiers relatifs qui est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels qui est lui-même inclus dans l'ensemble des nombres réels. »

Rappels :

$\mathbb{N}$= ensemble des entiers naturel*s* = entiers positifs
$\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers relatifs = ensemble des entiers (+ ou -)
$\mathbb{Q}$ = ensemble des nombres rationnels = quotient de 2 entiers relatifs, exprimé en fraction irréductible
$\mathbb{R}$ = ensemble des réels
$\mathbb{R}^*$= réels hors 0

$\mathbb{R}_+$ = réels positifs (réels strictement positifs=)

$\mathbb{R}_-$ = réels négatifs (réels strictement négatifs=)

1.1.3. Ensemble des parties d'un ensemble :

Définition :

On appelle **ensemble des parties d'un ensemble** E l'ensemble de tous les éléments de E.

Notation :

On écrit : $\mathbf{P(E)}$.

Soit E un ensemble à n éléments.
Card E = n $\Longrightarrow$ Card P(E)=2^n, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$

Exemples (voir cours) :

Si E ne contient aucun élément, alors E a une partie et P(E)= ?

Si E contient un élément : E = $\{a\}$, alors E a deux parties et P(E)= ?

Si E contient deux éléments : E = $\{a, b\}$, alors E a quatre parties et P(E)= ?

Si E = $\{a, b, c\}$, alors P(E)= ?

(Si l'on ajoute un élément à l'ensemble E, on double le nombre de parties de E)

1.2. Opérations sur les ensembles :

1.2.1 Intersection :

Définition :

Soient A et B deux sous-ensembles de E. On appelle **intersection** de A et B l'ensemble des éléments de E qui appartiennent simultanément à **A et B**.
Si A et B n'ont aucun élément en commun, leur intersection est **vide** et ils sont **disjoints**.

Notation :

L'intersection de A et de B se note : **A ∩ B**

Avec A ∩ B = $\{x \in E; x \in A \;\boldsymbol{et}\; x \in B\}$

Exemple :

$\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = ?$

Propriétés : (à compléter en cours)

- $A \cap A =$
- $A \cap \emptyset =$
- $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$
- $A \cap B =$ (commutativité)
- $(A \cap B) \cap C =$ (associativité)

1.2.2. Réunion :

Définition :

Soient A et B deux sous-ensembles de E. On appelle **réunion** de E l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à **A ou B**.

Notation :

La réunion de A et de B se note : $A \cup B$

Avec $A \cup B = \{x \in E ; x \in A \ \boldsymbol{ou} \ x \in B\}$

Exemple :

$\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = ?$

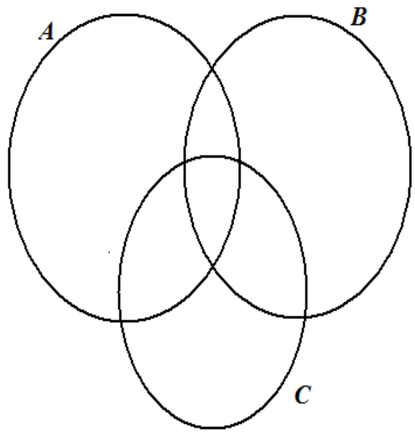
Propriétés : (à compléter en cours)

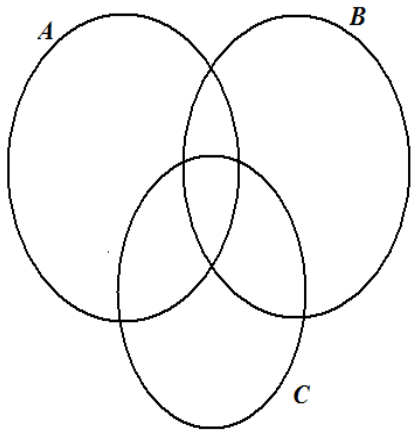
- $A \cup A =$
- $A \cup \emptyset =$
- $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$
- $A \cup B =$ (commutativité)
- $(A \cup B) \cup C =$ (associativité)

Et :

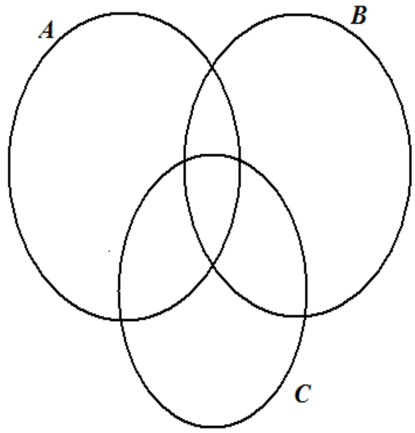
- $(A \cap B) \cup C =$ (distributivité)
- $(A \cup B) \cap C =$ (distributivité)

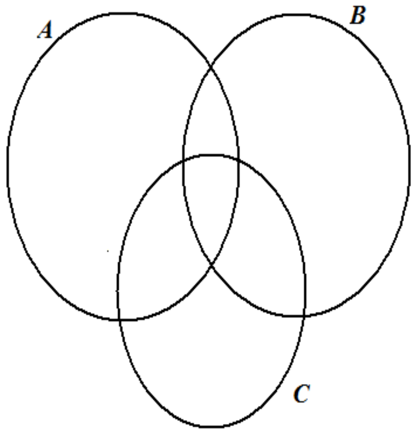
Représentations graphiques : (à compléter en cours)





(A ∩ B) ∪ C = (A ∪ C) ∩ (B ∪ C)





(A ∪ B) ∩ C = (A ∩ C) ∪ (B ∩ C)

1.2.3. Complémentaire :

Définition :

Soit A une partie de E. Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble des éléments x de E qui n'appartiennent pas à A.

Notation :

Le complémentaire de A par rapport à E se note : $\boldsymbol{\bar{A}}$ ou **C$_{\text{E}}$A**

$\bar{A} = \{x \in E; x \notin A\}$

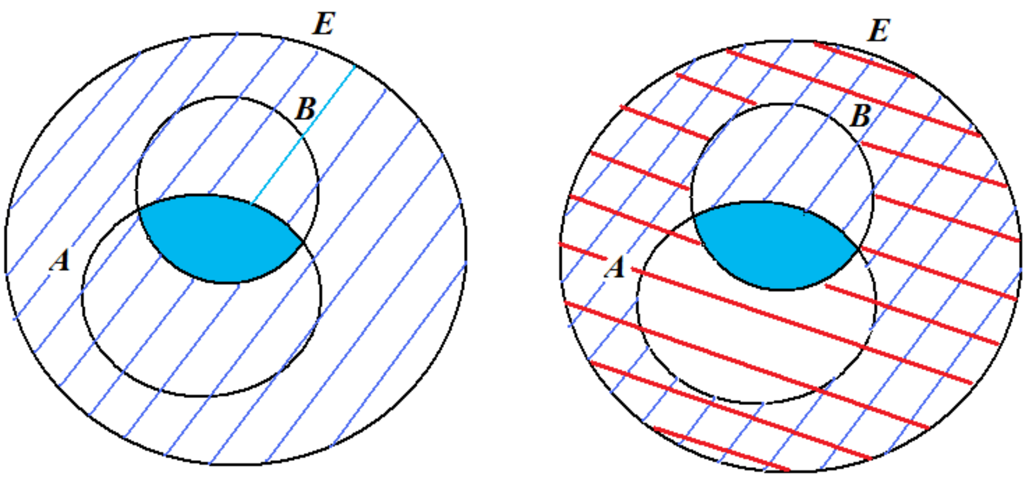
Exemple :

Si E = $\{a, b, c, d\}$ et A = $\{a\}$, alors $\bar{A}$ = ?

Propriétés : (à compléter en cours)
(on considère que E est l'ensemble de référence le plus grand)

- $A \cap \bar{A} =$
- $A \cup \bar{A} =$
- $\bar{E} =$
- $\bar{\emptyset} =$
- $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} =$
- $\overline{A \cup B} =$

Représentations graphiques :



$\overline{A \cap B}$ = $\bar{A} \cup \bar{B}$

1.2.4. Différence :

Définition :

Soient A et B deux parties de E. On appelle **différence** de A et B l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B.

Notation :

La différence de A et B se note : **A\B ou A – B**
A\B = $\{x \in E; x \in A\ et\ x \notin B\}$, et **A\B = A∩ $\bar{B}$**

Exercice 2 (correction en cours):

Déterminer les ensembles suivants : A\A, A\ ∅, ∅ \A, E\A.

Exercice 3 (correction en cours):

Ecrivez les affirmations suivantes en langage mathématiques :

a- Si tout élément x de l'ensemble E est un élément de l'ensemble F, E est inclus dans F.
b- Si A est inclus dans B, le complémentaire de B est inclus dans le complémentaire de A.
c- Si A et B sont disjoints, tout élément de E appartient au complémentaire de A ou au complémentaire de B.

1.2.5. Produit cartésien d'ensembles :

Définition :

On appelle **produit cartésien** d'un ensemble E par un ensemble F l'ensemble des couples (x,y), x appartenant à E et y appartenant à F.

Notation :

Le produit est noté **E × F** = $\{(x, y)|x \in E \ et \ y \ \in F\}$
On lit : « E × F = ensemble des couples x, y tels que… »

1.3. Les relations :

1. 3.1. Relation binaire :

Définition :

Soient E et F deux ensembles et G une partie de E× F. Etant donné un couple (x, y) de E× F, on dit que x est dans la relation $\mathfrak{R}$ avec y si (x,y) ∈ G. Une telle relation est appelée **relation binaire** et on note **x $\mathfrak{R}$ y**.

G est appelé **graphe** : ensemble dont les éléments sont les couples (x,y) vérifiant $\mathfrak{R}$.
On dit que E est **l'ensemble de départ** (ou source) et F est **l'ensemble d'arrivée** (ou but) de la relation $\mathfrak{R}$. On dit aussi que x est l'**antécédent** de y et y est l'**image** de x par la relation $\mathfrak{R}$.
L'ensemble de définition de $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des éléments de E qui ont au moins une image y dans F, soit : $\{x \in E | \exists \ y \in F, x \, \mathfrak{R} \, y\}$

L'ensemble des images de $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent x dans E, soit : $\{y \in F | \exists \ x \in E, x \, \mathfrak{R} \, y\}$

1. 3.2. Typologie des relations binaires :

Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\Re$.

- $\Re$ est **réflexive** si et seulement si $\forall\, x \in$ E, $x \,\Re\, x$.
- $\Re$ est **symétrique** si et seulement si $\forall (x, y)$ de E × E, $x \,\Re\, y \Rightarrow y \,\Re\, x$.
- $\Re$ est **antisymétrique** si et seulement si $\forall\, (x, y)$ de E × E, $[(x \,\Re\, y) et\ (y \,\Re\, x)] \Rightarrow y = x$.
- $\Re$ est **transitive** si et seulement si $\forall\, (x, y, z)$ de E^3, $[(x \,\Re\, y) et\ (y \,\Re\, z)] \Rightarrow x \,\Re\, z$.

Exercice 4 (correction en cours) :

Les relations suivantes sont-elles réflectives, symétriques, antisymétriques, transitives ?

- Notons E l'ensemble des droites du plan et $\Re$ la relation : « (D) est perpendiculaire (D)' ».
- Notons E l'ensemble des droites du plan et $\Re$ la relation : « (D) est parallèle à (D)' ».
- Notons E l'ensemble des nombres réels et $\Re$ la relation : « $(x-y)^2 < 1$ ».

Relation de pré-ordre « RT »:

$\Re$ est une relation de **pré-ordre** si elle est à la fois **Réflexive** et **Transitive.**

Relation d'ordre « RAT »:

$\Re$ est une relation d'**ordre** si elle est à la fois **Réflexive, Antisymétrique** et **Transitive.**

Relation d'équivalence « RST »:

$\Re$ est une relation d'**équivalence** si elle est à la fois **Réflexive, Symétrique** et **Transitive.**

2. Les fonctions (ou applications) :

2.1 Généralités :

2.1.1 Fonctions :

Définition :

On appelle **fonction** ou **application** l'opération qui associe à tout élément x ∈ E l'élément unique y ∈ F par la relation dite fonctionnelle $\Re$.

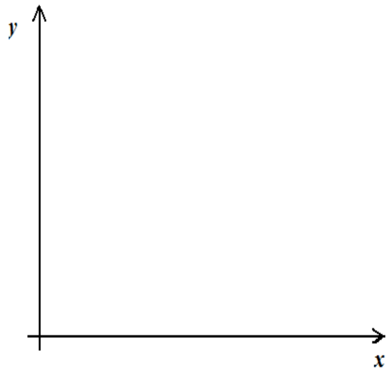
($\Re$ est dite fonctionnelle en y, si, quelque soit x∈ E, il existe **un élément et un seul** y∈ F, tel que x $\Re$ y soit vraie).

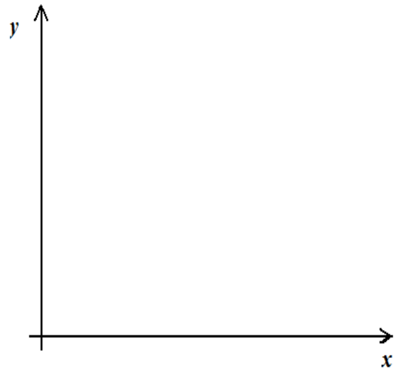
Une fonction est définie par le triplet (E, F, G) respectivement ses **ensembles de départ**, **d'arrivée** et son **graphe fonctionnel**.

Notation :

On dit que la fonction f est définie dans E et prend ses valeurs dans F ou que f est une application de E dans F, et l'on écrit $f : E \rightarrow F$ ou encore $f : x \rightarrow f(x)$.

Exemple avec représentation graphique : (voir cours)





Opération 1: $x \,\Re\, y$ est une fonction

Opération 2 : $x \,\Re\, y$ n'est pas une fonction

2.1.2 Image :

Pour tout sous-ensemble A de E, on appelle image de A par f, le sous-ensemble de F défini par : $f(A) = \{y \in F \mid \exists\, x \in A, tel\ que\ y = f(x)\}$.

2.1.3 Image réciproque:

Pour tout sous-ensemble B de F, on appelle image réciproque de B par f, le sous-ensemble de E défini par : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Pour tout y fixé dans F, l'équation f(x)=y admet 1 solution unique x dans E notée $x=g(y)= f^{-1}$.

Exercice 5 (correction en cours) :

Déterminer la réciproque des fonctions f définies par les expressions f(x) ci-après :

a) $f(x)= 2x+1$ b) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$.

Théorème:

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet une **application réciproque** sur I si et seulement si elle est **strictement monotone** sur I.

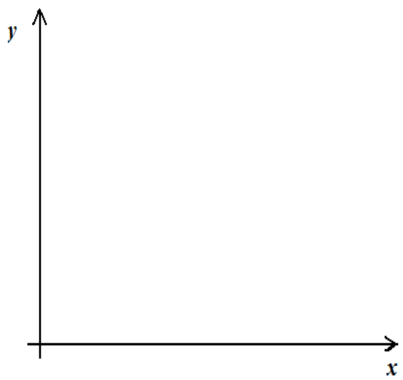
2.2 Typologie des fonctions :

2.2.1 Injection :

Une fonction (ou application) f : E → F est **injective** si et seulement si l'on a une des propriétés équivalentes :

- $\forall(x, x') \in E^2, x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$
- $\forall(x, x') \in E^2, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$
- Tout élément de F admet **au plus un antécédent** dans E.

Exemple : (voir cours)



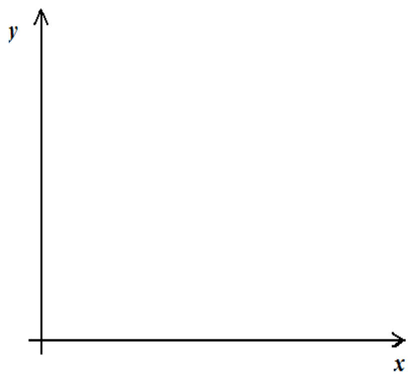
Fonction exponentielle :
La fonction f(x) $= e^{x}$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **injective.**

2.2.2 Surjection :

Une fonction (ou application) f : E → F est **surjective** si et seulement si l'on a une des propriétés équivalentes :

- F(E) = F ;
- Tout élément de F admet **au moins un antécédent** dans E.

Exemple : (voir cours)



2.2.3 Bijection :

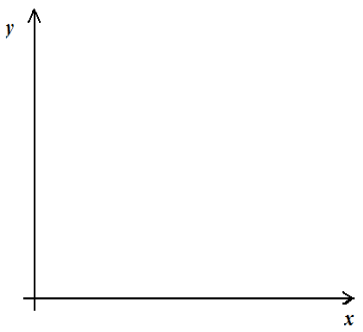
Une fonction (ou application) f : E $\rightarrow$ F est **bijective** si et seulement si l'on a une des propriétés équivalentes :

- f est injective et surjective.
- Tout élément de F admet **un antécédent unique** dans E.

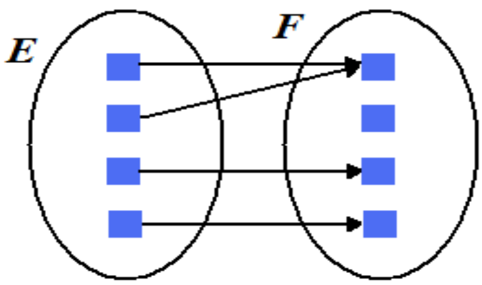
Théorème:

Une fonction est **bijective** sur un intervalle I si et seulement si elle est **continue** et **strictement monotone** sur cet intervalle.

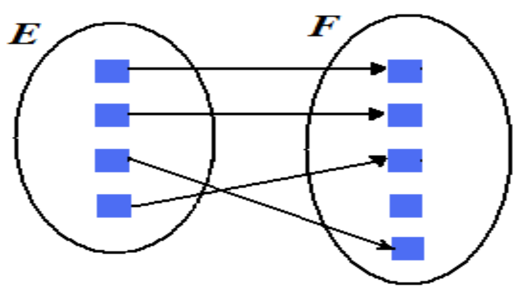
Exemple : (voir cours)



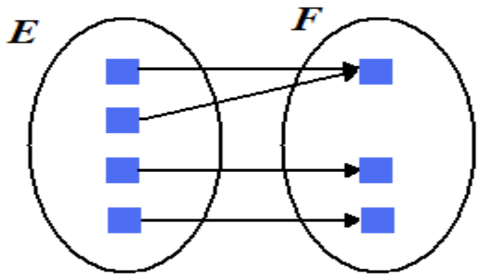
Représentations graphiques :



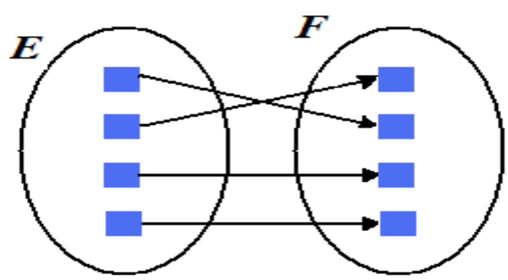
Quelconque



Injection
" au plus" un antécédent



Surjection
" au moins" un antécédent



Bijection
" un unique" antécédent

2.2.4 Involution :

Une fonction (ou application) f : E → F est **involutive** si et seulement si l'on a une des propriétés équivalentes :

- f est bijective et $f = f^{-1}$.
- $f \circ f = id_E$. (On note « id_E » la fonction identité : f(x) =x)

(fonction composée f∘ g vue ci-après, paragraphe 2.2.5)

Exemples :

f (x) = $\frac{1}{x}$ est involutive.

On a : f (x) = $\frac{1}{x} = f^{-1}$ et $f \circ f = id_E = x$.

De même, la fonction f(x) = $\frac{1}{x-a} + a$ est involutive.

2.2.5 Composition des applications (ou fonctions) :

Soient E, F, G trois ensembles. f est une application de E vers F et g une autre application de F vers G, l'ensemble de définition de g contenant l'ensemble d'arrivée de f.
Comme f est une application, tout élément x de E a une seule image y = f (x) dans F.
Comme f est une application, tout élément y de F a une seule image z = g (y) dans G.

On définit la **fonction composée** de f par g, notée $g \circ f$, comme la fonction qui associe à tout x *de* E le nombre réel g$[f(x)]$ dans G.

Comme z = g (y) et y = f (x), on a z = g$[f(x)]$.

$$\underbrace{E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G}_{g \circ f}$$ **(Attention : la première application est celle de droite)**

- La composition des applications **n'est pas commutative**, c'est à dire qu'en général $g \circ f$ est différent de $f \circ g$.
- La composition des applications est **associative** : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Exercice 6 (correction en cours) :

Soient f : x→ 2+ 3x et g : x→ x^2

Déterminez $g \circ f$ et $f \circ g$.

<u>Exercice 7</u> (correction en cours) :

Soient E, F, G, H quatre ensembles et f, g , h, trois applications.
Représentez graphiquement $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & G \arrow[d] \\ E \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[dr] & G \arrow[d] \\ E \arrow[u] \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

On vérifie que la composition des applications est associative.

En effet, soient $y = f(x)$ et $z = g(y)$
On a alors : $g \circ f = g[f(x)] = g(y) = z$ et $h \circ (g \circ f) = h(z)$
$(h \circ g) \circ f = (h \circ g) \circ [f(x)] = (h \circ g)(y) = h[g(y)] = h(z)$

<u>Remarque :</u>

« $f \circ f$ » se note « f^2 » ou « $f^2(x)$ », puis $f \circ f \circ f = f^3$, ainsi de suite…

<u>Attention !</u> ne pas confondre $f^2(x)$, $f(x^2)$ et $f(x)^2$.
Soit la fonction $f(x) = 2x$ $f^2(x)= ?$ $f(x^2) = ?$ $f(x)^2=?$

Exercice récapitulatif : (correction en cours)

Soient $y = f(x) = x^2+1$

$z = g(y) = y^5$

$w = h(z) = \sqrt{z}$

Déterminer $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$. Que peut-on conclure ?

Rappels sur les intervalles et ensembles de définition d'une fonction :

Intervalle :

On appelle **intervalle réel** un ensemble de nombres délimité par deux nombres réels constituant une borne inférieure et une borne supérieure. Un intervalle contient tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.

Cette définition regroupe les intervalles des types suivants, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$:

- $\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} =]a;\ b[$
- $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} = [a; b]$

Les intervalles du premier type sont appelés **intervalles ouverts** (contiennent toutes les valeurs entre **a et b non compris**); les seconds **intervalles fermés** (contiennent toutes les valeurs entre **a et b compris**).

On peut aussi avoir des intervalles semi-ouverts : (à compléter en cours)

- $\{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} =$?
- $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} =$?

À ces intervalles se sont ajoutés les ensembles des réels inférieurs à une valeur, ou supérieurs à une valeur :

- $\{x \in \mathbb{R}; x < a\} =$?
- $\{x \in R; x \leq a\} =$?
- $\{x \in \mathbb{R}; x > a\} =$?
- $\{x \in \mathbb{R}; x \geq a\} =$?

On note aussi:

- L'ensemble vide = ?
- $\{a\}$ = ?
- $\mathbb{R}$ = ?

Ensemble de définitions :

L'**ensemble de définition** $\boldsymbol{D_f}$ d'une fonction **f** dont l' ensemble de départ est noté $\boldsymbol{E}$ et l'ensemble d'arrivée **F,** est l'ensemble des éléments x de $\boldsymbol{E}$ pour lesquels $\boldsymbol{f}(x)$ existe :

$$D_f = \{x \in E \mid \exists y \in F \mid y = f(x)\}$$

$\boldsymbol{D_f}$ est encore appelé **domaine de définition** de $\boldsymbol{f}$ ou **domaine** de $\boldsymbol{f}$.

Si une fonction est définie sur $\mathbb{R}$ privé du réel a, on note $D_f = \mathbb{R} - \{a\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{a\}$

Si une fonction est définie sur $\mathbb{R}$ privé des réels a et b, on note D_f = ?

Si une fonction n'est pas définie sur un intervalle $]a, b[$, on note D_f = ?

Attention :

Ne pas confondre domaine de définition et domaine d'étude.

Ne pas confondre le domaine de définition d'une fonction **f** (**D**$_f$) avec son ensemble de départ (**E**). Il arrive toutefois que les deux soient égaux, elle est alors dite définie partout dans **E**.

Exercices récapitulatifs sur les intervalles et domaines de définition: (correction des exercices en cours)

Exercice 1: Intervalle de $\mathbb{R}$

Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x :

a) $5x+2 \geq -3$ b) $x^2+1 \leq 1$
c) $|x-1| \leq 4$

Conseil : il faut isoler x, il ne faut plus faire intervenir de valeur absolue ou de radical.

Exercice 2: Ensemble de définition d'une fonction

Les expressions f(x) ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D que l'on demande de déterminer à chaque fois :

a) $\frac{2x+6}{x^2+6x+9}$ b) $\sqrt{x^2+x-2}$ c) $\sqrt[3]{1-x^2}$

d) $\sqrt{-x} + (2+x)^{-1/2}$ e) $\ln \frac{2+x}{2-x}$ f) $\ln \frac{x^2-3x+2}{x+1}$

Conseil: l'ensemble de définition est obtenu à partir de celui des fonctions usuelles: le dénominateur doit être non nul pour une fraction, l'argument positif pour une racine carrée, ou un logarithme…

Rappels sur les fonctions :

Fonction croissante :

Une fonction est **croissante** sur un intervalle I appartenant à E si, pour tout couple (x, x') $\in$ I, la relation x $\leq$ x' entraîne f(x) $\leq$ f (x').

Fonction strictement croissante si $<$ au lieu de $\leq$

Exemple et graphe : voir cours

Fonction décroissante :

Une fonction est **décroissante** sur un intervalle I appartenant à E si, pour tout couple (x, x') $\in$ I, la relation x $\leq$ x' entraîne f(x) $\geq$ f (x').

Fonction strictement croissante si $>$ au lieu de $\geq$

Exemple et graphe : voir cours

Fonction monotone :

Une fonction est **monotone** sur un intervalle I appartenant à E si elle est **croissante** ou décroissante sur cet **intervalle**.

Exemple et graphe : voir cours

Fonction minorée, majorée, bornée :

Une fonction définie sur un ensemble E est **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall x \in$ E, f(x) $\leq$ M.

Une fonction définie sur un ensemble E est **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall x \in$ E, f(x) $\geq$ m.

Une fonction définie sur un ensemble E est **bornée** s'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in$ E, m$\leq$f(x) $\leq$ M. f est alors à la fois majorée et minorée.

Remarque : f est bornée si |f(x)| est majorée, càd |f(x)| $\leq$ à un réel.

Exemple et graphe : voir cours

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) $=\frac{4}{x^2+4}$.

f est-elle bornée ? Si oui, quelles sont ses bornes inférieures et supérieures ?

Fonction constante :

Une fonction est **constante** sur un intervalle I appartenant à E si : $\forall\ (x, x') \epsilon$ I, f(x) = f(x').

Exemple et graphe : voir cours

Fonction périodique :

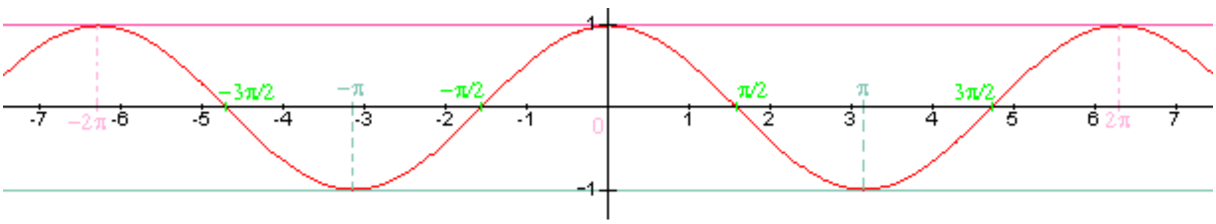
Une fonction est **périodique** s'il existe un nombre réel T non nul tel que, pour tout x appartenant à un ensemble E, x+T ∈ E et f (x+T) = f(x).

Sa connaissance sur tout intervalle de longueur T, $[a, a + T]$suffit à la définir complètement. Son graphe complet s'obtient alors par translations.

On dit que T est la **période** de la fonction.

Exemple et graphe:

Fonction cosinus :



La courbe se répète tous les 2π., un réel qui est la **période** de la fonction cosinus.

Remarque : une fonction strictement monotone ne peut pas être périodique.

Fonction paire :

Une fonction est **paire** si pour tout x appartenant à un ensemble E, f (–x) = f(x).

Son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple et graphe: (voir cours)

f(x)= x^2

f (–x)= ?

Fonction impaire :

Une fonction est **impaire** si pour tout x appartenant à un ensemble E, f (–x) = – f(x).

Son graphe admet (0,0) pour centre de symétrie.

Exemple et graphe: (voir cours)

f(x)= $\frac{1}{x}$

f (–x)= ? – f(x)= ?

Propriétés concernant les fonctions paires et impaires :

- La seule fonction qui soit à la fois paire et impaire est la fonction nulle (fonction constante égale à 0).
- En général, la somme d'une fonction paire et une fonction impaire n'est ni paire ni impaire ; exemple : $x + x^2$.
- La somme de deux fonctions paires donne une fonction paire, et tout produit d'une fonction paire par une constante est pair.
- La somme de deux fonctions impaires donne une fonction impaire, et tout produit d'une fonction impaire par une constante est impair.
- La parité suit, pour le produit ou le quotient, la "règle des signes" : tout produit ou quotient de deux fonctions paires est une fonction paire, tout produit ou quotient de deux fonctions impaires est aussi une fonction paire, tout produit ou quotient d'une fonction paire par une fonction impaire est une fonction impaire.
- La composée de deux fonctions impaires est impaire ; la composée g ∘ f d'une fonction paire *g* avec une fonction impaire *f* est une fonction paire.
- La composée g ∘ f d'une fonction quelconque *g* avec une fonction paire *f* est une fonction paire.

Fonction symétrique par rapport à un axe (avec symétrie axiale):

Une fonction a pour **axe de symétrie** la droite x= a si f $(a - x) =$ f $(a + x)$ pour tous réels x et a tels que $a - x$ et $a + x$ appartiennent à l'ensemble de définition D_f

Son graphe est symétrique par rapport à la droite x= a.

Exemple et graphe: (voir cours)

Fonction symétrique, avec symétrie centrale :

Une fonction a pour **centre de symétrie** le point O' de coordonnées (a ; b), si

$\frac{f(a-x)+f(a+x)}{2} = b$ pour tous réels x et a tels que $a - x$ et $a + x$ appartiennent à l'ensemble de définition D_f .

Exemple et graphe: (voir cours)

Remarque : Le fait de voir la symétrie, parité, périodicité.. d'une fonction permet de réduire le domaine d'étude de la fonction (de l'étudier simplement sur un intervalle et non sur $\mathbb{R}$).

Exercices récapitulatifs sur les fonctions (correction en cours):

Exercice 1:

Les expressions f(x) ci-dessous sont-elles paires ou impaires ?

Conseil : remplacer x par – x dans l'expression de f(x) et vérifier si l'on retrouve comme expression f(x) ou - f(x) .

- $f(x)= \sqrt{1-|x|}$
- $f(x)= |x+1| - |x-1|$
- $f(x)= |x^2 - x|$

Rappel sur les valeurs absolues :

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq -1 \\ -(x+1) & si\ x \leq -1 \end{cases}$$

Exercice 2:

L'expression f(x) ci-après est-elle périodique ? f(x) représente la partie entière de x, c'est-à-dire la plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Conseil : l'expression f(x+1) comparée à f(x) peut permettre de déceler une périodicité éventuelle des fonctions précédentes et de simplifier la représentation graphique..