Correction TD2 Analyse. Limites et Continuité.

Exercice 1 :

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$? $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;3\}$

En -2 . le numérateur vaut $(-2)^3 + 3\times(-2)^2 + 2\times(-2) = -8+12-4$
$= 0$

. le dénominateur vaut $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$

On arrive ainsi à une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.
Il nous faut transformer l'expression pour déterminer la limite.
Le fait que le polynôme du numérateur et du dénominateur s'annulent en -2 nous dit que -2 est racine des 2 polynômes.
On peut donc factoriser numérateur et dénominateur par $(x-(-2)) = (x+2)$

le numérateur : $x^3+3x^2+2x = x(x^2+3x+2)$

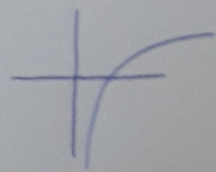
$$= x\left[(x+2)(x+1)\right]$$

le dénominateur : $x^2-x-6 = (x+2)(x-3)$

et ainsi $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x(x+1)}{(x-3)} = \dfrac{-2(-2+1)}{(-2-3)}$

$$= -\frac{2}{5} \quad \square$$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + \ln x}{x^2}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^{*+}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \ln x = -\infty$ (fonction ln : )

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1+\ln x}{x^2} = -\infty \times +\infty = -\infty$ □

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \ln x}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \ln x = +\infty$

au dénominateur : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, on arrive à une FI du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$; il nous faut transformer l'expression.

$$\frac{1 + \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$$

→ on reconnait en $+\infty$ une croissance comparée

→ on connait en $+\infty$ sa limite

et ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

$= 0 + 0 = 0$ □

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(1+x) - \ln 3}{x-2}$ $\quad D_f =]-1;2[\cup]2;+\infty[$

limite du numerateur : $\lim\limits_{x \to 2} \ln(1+x) - \ln 3 = \ln 3 - \ln 3 = 0$

limite du denominateur : $\lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 0$

on arrive ainsi à une forme indeterminée du type $\frac{0}{0}$.

on pense au taux d'accroissement de $f : x \mapsto \ln(1+x)$

Sa limite en 2 est : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(1+x) - \ln 3}{x-2}$

on retrouve la limite demandée. Or la limite du taux d'accroissement de f en 2 vaut $f'(2)$.

Soit f' sur D_f la dérivée de f on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

ainsi $f'(2) = \dfrac{1}{3}$;

on a donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(1+x) - \ln 3}{x-2} = \dfrac{1}{3}$ □.

Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{x \ln|x|}{x^2-1}$

1) On cherche à déterminer D_f

Pour cette fonction 2 contraintes : 1. l'argument de ln doit être strictement positif.

2. le dénominateur doit être différent de 0.

Pour satisfaire 1. il faut que $|x| > 0 \Rightarrow x \neq 0$

(par définition de valeur absolue, on a la positivité)

Pour satisfaire 2., $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \neq 0$ identité remarquable

soit $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

Ainsi D_f est l'intersection de ces restrictions soit $D_f = \mathbb{R}^* \setminus \{-1;1\}$

ou exprimé différemment, $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \ln|x|}{x^2-1}$

$\left.\begin{array}{l} \forall x \geq 0, \quad |x| = x \\ \forall x \leq 0, \quad |x| = -x \end{array}\right)$ par définition de la valeur absolue

on détermine dans un premier temps $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln|x|}{x^2-1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{x^2-1}$$ (on se place pour $x > 0$ avec $x \to 0^+$)

d'après les croissances comparées, $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

d'où $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0}{-1} = 0$.

on cherche maintenant à déterminer $\lim_{x \to 0^-} f(x)$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x \ln|x|}{x^2-1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \ln(-x)}{x^2-1}$$ ($x<0$, $x \to 0^-$)

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-(-x \ln(-x))}{(-x)^2-1}$$ (en remarquant que $x^2 = (-x)^2$)

en faisant le changement de variable suivant $X = -x$ notre limite revient à :

$$\lim_{X \to 0^+} \frac{-X \ln X}{X^2-1} = 0$$ par croissances comparées pour les mêmes raisons que précédement.

on cherche maintenant $\lim_{x \to 1} f(x)$; étant au voisinage de 1 on peut restreindre notre espace de définition de f à $\mathbb{R}^+$ pour se passer de la valeur absolue.

Ainsi $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{(x-1)(x+1)}$ (identités remarqua

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x+1}\right) \times \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$$ or $\ln 1 = 0$ ainsi je peux écrire

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x+1}\right) \times \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$$

je reconnais la limite en 1 du taux d'accroissement de $\ln x$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \quad \square$$

3) f est continue comme produit de fonctions continues sur leur ensemble de définition ($D \subset Df$)

4) Prolongement par continuité en 0 et 1 ?

d'après 2) on a : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$

et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

ainsi : les limites de f à gauche et à droite de 0 sont finies et égales

les limites de f à gauche et à droite de 1 sont finies et égales.

on peut donc prolonger f par continuité en 0 et 1 en posant $\tilde{f}$:

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$