CHAPITRE 4 : PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

Plan d'étude d'une fonction

1. **Recherche de l'ensemble de définition**
2. **Recherche de l'ensemble d'étude**
3. **Etude des limites et de la continuité (aux points où la fonction est non définie, aux bornes des intervalles, en + et – l'infini)**
4. **Etudes de la dérivabilité et construction du tableau de variations de la fonction (avec étude des points remarquables : points à tangente horizontale, points pour lesquels la fonction n'est pas définie, pas dérivable..)**
5. **Compléments : concavité, convexité…**
6. **Représentation graphique**

1. Recherche de l'ensemble de définition (voir chapitre 1, rappels sur les fonctions)

2. Recherche de l'ensemble d'étude

C'est le sous-ensemble de l'ensemble de définition sur lequel il est nécessaire et suffisant d'étudier la fonction.
Si une fonction est **paire**, ou **impaire**, ou **périodique**, ou **symétrique** par rapport à un axe ou à un centre, il ne sera nécessaire d'étudier la fonction que sur ce sous-ensemble.
(voir chapitre 1, rappels sur les fonctions)

Axes et centres de symétries usuels : (à connaître par cœur)

- La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour **axe** de symétrie $x = -\frac{b}{2a}$.
- L'hyperbole d'équation $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a pour **centre** de symétrie le point de coordonnées $(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$.
- La courbe d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a pour **centre** de symétrie son point d'abscisse $x = -\frac{b}{3a}$.

Exemple :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$
$$= \sqrt{(x+5)(x-1)}$$
$$D_f =]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$$

f admet la droite d'équation x=2 ($=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times 1}$) comme axe de symétrie. Il suffit par conséquent d'étudier f sur $[1; +\infty[$.

3. Etude des limites et de la continuité

3.1 Continuité (voir chapitre 2)

Rappels : Comment montrer qu'une fonction est continue en un point ? sur un intervalle ouvert ? sur un intervalle fermé ?

- Fonction continue en **un point a** si limite à gauche de a= limite à droite de a= image de a par f, c'est-à-dire si $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(\text{a})$.
- Bornes de l'intervalle exclues : fonction continue sur l'**intervalle ouvert** $]a; b[$ si composée de fonctions continues sur cet intervalle.

- Bornes de l'intervalle incluses : fonction continue sur l'**intervalle fermé** $[a;b]$ si composée de fonctions continues sur l'intervalle **ouvert** $]a;b[$. Puis étude de la continuité aux points **a** et **b**, **bornes** de l'intervalle (voir fiche de TD n°3, exercice 4).

Remarque : penser à étudier le **prolongement par continuité** aux points **exclus** de l'intervalle de définition (voir fiche de TD n°2, exercice 2).

Exemple : si f est fonction définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ avec $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$. On dit que g est un prolongement par continuité de f ssi : $\forall x \neq x_0,\ \ g(x) = f(x)\ et\ g\ (x_0) = a.$
(Il faut montrer que la limite de f(x) quand x tend vers x_0 est égale à une limite finie a).

3.2 Limites (voir chapitre 2) et asymptotes

- Etude des limites en un point : étudier les limites aux points pour lesquels la fonction n'est pas définie (voir chapitre 2) et détermination des asymptotes (voir tableau ci-dessous).

- Etude des branches infinies (limites en + et - ∞ : voir chapitre 2) et détermination des asymptotes (voir tableau ci-dessous).

Tableau à connaitre par cœur :

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{\infty} f = l$</td><td colspan="3">Asymptote (AS) : droite d'équation y = l</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x_0} f = \infty$</td><td colspan="3">Asymptote (AS) : droite d'équation $x=x_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$\lim\limits_{\infty} f = \infty$</td><td>$\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$</td><td colspan="2">Branche parabolique (BP) de direction Oy</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$</td><td colspan="2">Branche parabolique de direction Ox</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = a$</td><td>$\lim\limits_{\infty}(f(x) - ax) = b$</td><td>AS : droite d'éq.y=ax+b</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\infty}(f(x) - ax) = \infty$</td><td>BP de dir. y=ax</td></tr>
<tr><td>$f(x) - ax\ \ n'a\ pas\ de\ limite\ en\ \infty$</td><td>Direction parabolique d'éq. y=ax</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x}\ \ n'a\ pas\ de\ limite$</td><td colspan="2">Pas de conclusion</td></tr>
</table>

4. Etudes de la dérivabilité (voir chapitre 3) et construction du tableau de variations de la fonction

4.1 Etude de la dérivabilité (voir chapitre 3)

Rappels : Comment montrer que f est dérivable sur un intervalle ouvert ? sur un intervalle fermé ? en un point ?

- f dérivable sur un **intervalle ouvert** $]a;b[$ si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.
- f est dérivable sur un **intervalle fermé**$[a;b]$ si elle est dérivable sur $]a;b[$ (intervalle **ouvert**) et dérivable en **a** et **b**. (Il ne faut donc pas oublier d'étudier la dérivabilité aux points a et b, **bornes de** l'intervalle).
- f est dérivable en un **point a** si dérivée à gauche de a= dérivée à droite de a = valeur finie.

Puis calculer la **dérivée première** et **la dérivée seconde**.

4.2 Etude des points remarquables

On étudie en particulier :

- Les points pour lesquels f n'est pas dérivable : points à tangente verticale, points anguleux (dérivée à gauche ≠ dérivée à droite), points de rebroussement (voir exercice 2, étude de la fonction C)
- Les points à tangente horizontale = points à dérivée première nulle.
- Les points d'arrêt : si les bornes sont **incluses** dans D_f (intervalle fermé), on précise la tangente en ces points.
- Les points limites : bornes de D_f, mais **exclues** (intervalle ouvert).

4.3 Etude des extrema d'une fonction

4.3.1 Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- f admet un **maximum** relatif $f(x_0)$ en x_0 ssi il existe un intervalle I' centré en x_0 tel que $\forall x \in I \cap I', f(x) \leq f(x_0)$
- f admet un **minimum** relatif $f(x_0)$ en x_0 ssi il existe un intervalle I' centré en x_0 tel que $\forall x \in I \cap I', f(x) \geq f(x_0)$

Remarque :
extremum relatif = extremum local.
extremum global = extremum absolu =“extremum des extremum locaux” : on a une inégalité stricte dans la définition.
extremum strict = extremum unique (avec inégalité stricte dans la définition).

4.3.2 Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle de centre x_0. Si la dérivée s'annule en x_0 en changeant de signe, alors la fonction admet un extremum local en x_0.

Remarque 1 :

Le théorème précédent nous donne une **condition suffisante** pour que f admette un extremum en x_0 mais cette condition n'est **pas nécessaire**.
Autrement dit, il peut exister d'autres cas pour lesquels la fonction admet un extremum.

Exemples :

- la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-4)^2 + 5$ admet un **minimum** au point x_0= 4.
  f'(4)=0 **et** f' change de signe au point d'abscisse x_0 = 4.
  Pour x< 4, f est décroissante (car f'(x) < 0) et pour x> 4, f est croissante (car f'(x) >0).
  Autrement dit, f change de sens de variation en x_0 = 4.

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) =$|x|$ admet un **minimum** au point x_0=0 mais **n'est pas dérivable en ce point** (la dérivée à gauche = -1, dérivée à droite = 1)

Remarque 2:

La nullité de la dérivée est une **condition nécessaire** pour qu'un point soit un extremum mais elle n'est **pas suffisante**. Autrement dit, la réciproque de cette proposition est fausse.
Les points qui vérifient f'($\mathbf{x_0}$)=0 sont donc des « candidats » à être des extrema mais ne sont pas forcément des extrema. Pour qu'ils soient des extrema, il faut aussi que la dérivée change de signe en $\mathbf{x_0}$.

Exemple avec graphique (voir cours)

4. 3.3 Critères pour les extrema d'une fonction

- **Critère de nécessité (1^{er} ordre)**

Si f est une fonction **dérivable** en *a* et possède un extremum en *a*, alors f'(*a*) = 0. On utilise ce critère pour rechercher les points où une fonction est susceptible d'avoir un extremum (appelés points critiques ou points candidats).

- **Critère de nécessité (2^{nd} ordre)**

Soit une fonction f dont la dérivée existe et s'annule en *a*, et dont la dérivée 2^{nde} existe en *a*.
Alors : si f admet un minimum en *a*, on a f''(*a*) $\geq$ 0
si f admet un maximum en *a*, on a f''(*a*) $\leq$ 0

Cette propriété se démontre grâce à la formule de Taylor d'ordre 2 au voisinage de *a*.

Attention : cette condition est **nécessaire** mais n'est **pas suffisante** pour avoir un extremum en a. Autrement dit, la réciproque de cette proposition est fausse.

Exemple : f est définie sur ℝ par $f(x) = x^3$. f''(0) =0, donc f''(0) ≤ 0 mais 0 n'est pas un extremum.

- **Critère de suffisance (2^{nd} ordre)**

Si f est une fonction deux fois dérivable en a avec f'(a) = 0 et f''(a) ≠ 0, alors f a un extremum en a. Cet extremum est un minimum si f''(a) > 0, et un maximum si f''(a) < 0.
(attention, ici l'inégalité est **stricte**)

Généralisation

Théorème : *Soit f une fonction n fois dérivable.*
Si $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ *et* $f^{(n)}(a) \neq 0$, *alors a correspond à un extremum de f ssi n est pair.*

Récapitulatif, méthode pour trouver les extrema d'une fonction:

Pour trouver les extrema d'une fonction f 2 fois dérivable sur un intervalle I de ℝ, procéder comme suit :

- Chercher les candidats en résolvant f'(x) =0
- Seuls ceux qui vérifient f''(x) <0 ou f''(x) > 0 sont de façon certaine des extrema.
- Si f''(x)=0, on ne peut rien conclure. Il faut examiner par un autre moyen si c'est un extremum ou pas.

Remarque : on peut aussi chercher les candidats résolvant f'(x) =0 puis seuls ceux en lesquels f'change de signe sont des extrema.

Ne pas oublier les extrema possibles aux points où la fonction n'est pas dérivable (dérivée à gauche différente de la dérivée à droite, points de rebroussement).

4.4 Construction du tableau de variation de la fonction : (voir exercices)

5. Compléments : concavité, convexité et points d'inflexion

Nb : Un point d'inflexion correspond à un changement de concavité.

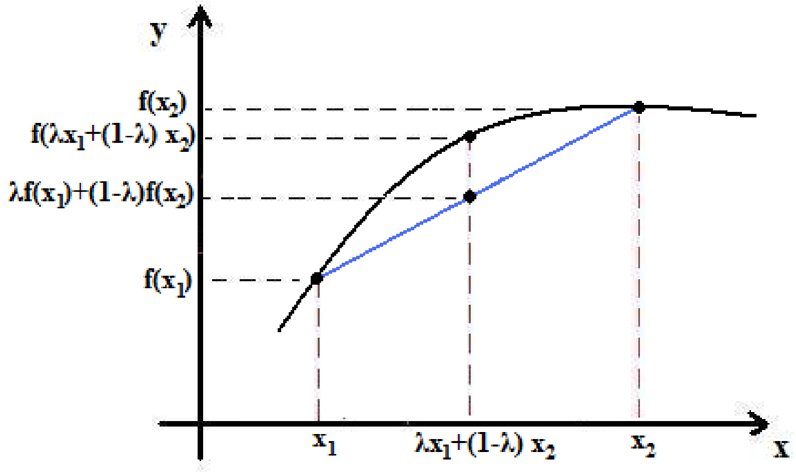
5.1. Fonctions concaves sur un intervalle I : définition

La fonction réelle f définie sur l'intervalle I est dite concave si $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}, \forall \lambda \in [0;1]$:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$$

Nb : Concavité stricte si inégalité stricte.

Représentation graphique :



Exemple :

$x_1=1$ et $x_2=6$; $\lambda = \frac{1}{2}$. Une fonction f est concave sur I si $\frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(6) \leq f(3{,}5)$.

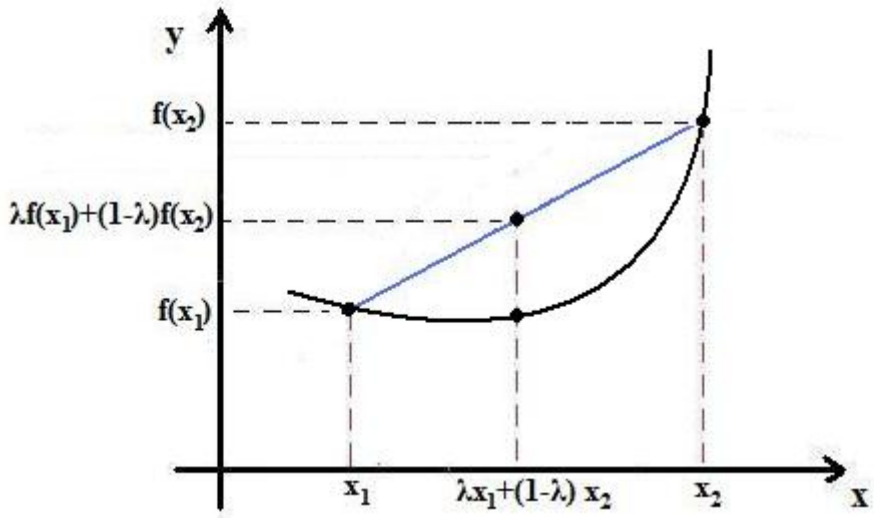
Propriété : f est concave ssi son graphe est situé « en-dessous » de toute tangente en un point quelconque de ce graphe.

Théorème fondamental : *Soit f une fonction sur un intervalle I et dérivable à l'intérieur de cet intervalle. A lors f est concave ssi* $\forall x, x_0 \in I,\; f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)f'(x_0)$

Si f est 2 fois dérivable, la condition de concavité s'écrit simplement $f''(x_0) \leq 0 \quad \forall x, x_0 \in I$.

5.2. Fonctions convexes sur un intervalle I : définition

Les fonctions convexes ont la même définition et les mêmes propriétés que les fonctions concaves, en inversant l'inégalité.



5.3. <u>Points d'inflexion : définition</u>

Une fonction numérique f admet x_0 comme point d'inflexion s'il existe un intervalle]a ; b[tq :

- f soit concave sur]a ; x_0[et convexe sur]x_0 ; b[

  ou

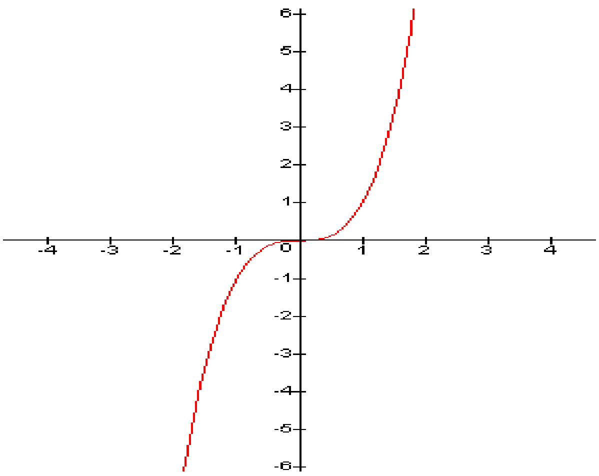
- f soit convexe sur]a ; x_0[et concave sur]x_0 ; b[

Le point d'inflexion est donc un point où s'opère un **changement de concavité** d'une courbe. En un tel point, la tangente traverse la courbe.

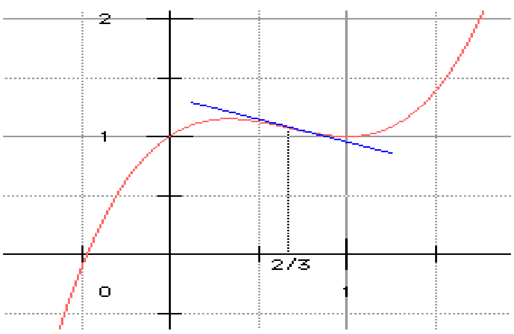
Si f est 2 fois dérivable, si $f''(x_o) = 0$ **et** si f'' change de signe en x_o, alors x_o est un point d'inflexion.

<u>Exemples :</u>

a) Fonction $f(x)= x^3$
   $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. En $x = 0$, f '' s'annule en changeant de signe. Le point de coordonnées (0,0) est donc un point d'inflexion.



b) Fonction $f(x) = 1 + x(x - 1)^2$.
   La courbe admet un point d'inflexion en $x = 2/3$.



6. <u>Représentation graphique de la fonction</u> : voir exercices

Exercice récapitulatif sur les fonctions :

<u>Exercice :</u> (correction en cours)

A) Etude de la fonction f définie par $f(x)= 2x+1+\frac{1}{x^2}$, de courbe représentative C.
B) Etude de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{2}x-5-\frac{2}{3-x}$, de courbe représentative C.
C) Etude de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{ln|x+1|}$, de courbe représentative C. (fiche de TD n°4, Exercice 1, c))
D) Etude de la fonction définie par $f(x)=\frac{3}{2}x+ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$, de courbe représentative C. (partiel mai 2002)