Chapitre 1 : Espaces vectoriels

1 Définitions

1.1 Groupes, anneaux et corps

Soit G un ensemble et $+$ une loi sur cet ensemble. $+$ est une application de $G \times G \to G$ qui à $(x, y) \in G \times G$ associe le point $x + y$ de G.

Définition 1.1
$(G, +)$ est appelé un ***groupe*** *si :*
(i) La loi est associative : $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G$, on a : $x + (y + z) = (x + y) + z$.
(ii) Existence de l'élément neutre : $\exists 0_G \in G$ tq $\forall x \in G$, on a : $0_G + x = x + 0_G = x$.
(iii) Existence d'un élément inverse : $\forall x \in G, \exists y \in G$ tq $x + y = 0_G$ (y est noté $-x$).

On dit que $(G, +)$ est un groupe abélien ou groupe commutatif si $(G, +)$ est un groupe et s'il est de plus commutatif :
(iv) Groupe commutatif : $\forall (x, y) \in G \times G : x + y = y + x$.

Exemple 1
- *$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.*
- *$\mathbb{R}$ n'est pas un groupe pour la multiplication mais $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ est un groupe commutatif pour la multiplication.*

On considère maintenant un ensemble A muni de deux lois $+$ et $*$.

Définition 1.2
$(A, +, *)$ est un ***anneau*** *si :*
(i) $(A, +)$ est un groupe commutatif ayant pour élément neutre un élément noté 0.
(ii) $*$ est une loi associative.

(iii) La loi $*$ *est distributive à droite et à gauche sur la loi* $+$. *Ainsi* $a * (b + c) = a * b + a * c$ *et* $(a + b) * c = a * c + b * c$.

(iv) $*$ *admet un élément neutre noté* 1.

On dit qu'un anneau est commutatif lorsque la loi $*$ est commutative.

Définition 1.3

$(K, +, *)$ *est un* ***corps*** *(resp. commutatif) si :*

(i) $(K, +, *)$ *est un anneau (resp. commutatif).*

(ii) Tout élément distinct de 0 *admet un inverse pour la loi* $*$.

Exemple 2

- *Soit* $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers naturels positifs et négatifs.* $(\mathbb{Z},+,*)$ *est un anneau commutatif.*

- *Soit* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble des nombres rationnels,* $\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \ / \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
  $(\mathbb{Q},+,*)$ *est un corps commutatif.*

1.2 Espaces vectoriels

Soit E un ensemble et $(K, +, *)$ un corps. Considérons que E est muni de deux lois :

Une loi interne $\oplus$: $\begin{cases} E \times E \to E \\ (X, Y) \longmapsto X \oplus Y \end{cases}$

Une loi externe . : $\begin{cases} K \times E \to E \\ (\lambda, X) \longmapsto \lambda.X \end{cases}$

Définition 1.4

E muni de ces deux lois est un ***K-espace vectoriel*** *(ou un espace vectoriel sur K, en abrégé e.v. sur K) si :*

$(E, \oplus)$ *est un groupe commutatif i.e. si on a :*

- *(1) Associativité.*

— *(2) Existence d'un élément neutre.*
— *(3) Existence d'un opposé (ou élément inverse).*
— *(4) Commutativité.*

Et si la loi externe vérifie :

— *(5) Distributivité à gauche de . sur* $\oplus$ *:* $\forall (X,Y) \in E \times E, \forall \lambda \in K : \lambda.(X \oplus Y) = \lambda.X \oplus \lambda.Y$.
— *(6) Distributivité à droite de . sur* $\oplus$ *:* $\forall X \in E, \forall (\lambda,\mu) \in K \times K : (\lambda \oplus \mu).X = \lambda.X \oplus \mu.X$.
— *(7) Associativité de . :* $\forall X \in E, \forall (\lambda,\mu) \in K \times K : \lambda.(\mu.X) = (\lambda.\mu).X$.
— *(8) Élément neutre :* $\forall X \in E : 1.X = X$.

Exemple 3
$(\mathbb{R},+,*)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Remarque :
Les éléments de K sont souvent appelés les scalaires.

Enfin, ceci est implicite dans cette définition mais on doit aussi avoir la stabilité pour la loi interne (i.e. $\forall (X,Y) \in E \times E : X \oplus Y \in E$) et pour la loi externe (i.e. $\forall (\lambda, X) \in K \times E : \lambda.X \in E$).

Proposition 1.1
Soit E un K-espace vectoriel, alors :
1. $\forall X \in E : 0_K.X = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in K : \lambda.0_E = 0_E$.
3. $\forall \lambda \in K, \forall X \in E : -(\lambda.X) = (-\lambda).X = \lambda.(-X)$.
4. $\forall X \in E, \forall \lambda \in K : \lambda.X = 0_E \Leftrightarrow [\lambda = 0_K \text{ ou } X = 0_E]$.

Exemple 4
a) $\mathbb{R}^n$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel avec les*

propriétés usuelles d'addition de vecteurs et de multiplication par un scalaire. Ainsi $\mathbb{R}^3$ *muni des deux lois suivantes :*

1) $(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$.

2) $\lambda.(x, y, z) = (\lambda * x, \lambda * y, \lambda * z)$.

b) Soit X *un ensemble quelconque non vide et soit* E *un* K*-espace vectoriel. L'ensemble* $F(X, E)$ *des applications de* X *dans* E *est un* K*-espace vectoriel pour les lois définies ainsi :*

1) $f \oplus g : x \mapsto f(x) + g(x)$.

2) $\lambda.f : x \mapsto \lambda.f(x)$.

Ainsi $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F([a, b], \mathbb{R})$ *ou encore* $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *sont des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels.*

c) L'ensemble des polynômes réels en X *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Définition 1.5

Soit E *un* K*-espace vectoriel et* F *un sous-*

ensemble non vide de E *tel que* $F \subseteq E$, *alors* F *est un* ***sous-espace vectoriel*** *de* E *si* F, *muni des lois internes et externes restreintes sur* F, *a la structure d'espace vectoriel.*

Note :
Pour la suite du cours on notera $+$ la loi $\oplus$ bien que le sigle $+$ serve aussi pour dénoter l'addition dans le corps K.

Proposition 1.2

Soit $F \subseteq E$ *un sous ensemble non vide de* E, *un* K*-espace vectoriel. On a équivalence entre :*

(i) F *est un sous-espace vectoriel.*

(ii) $\forall (X, Y) \in F \times F, \forall \lambda \in K : X + Y \in F$ *et* $\lambda.X \in F$.

(iii) $\forall (X, Y) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in K \times K : \lambda.X + \mu.Y \in F$.

Cette proposition nous indique qu'il est nécessaire et suffisant de montrer que F est stable par combinaison linéaire pour montrer que c'est un sous-espace de E.

En particulier, on peut remarquer qu'on doit toujours avoir $\overrightarrow{0} \in F$.

Exemple 5
Soit $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\right\}$.
A est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.3
Soit F_i une famille de sous-espaces vectoriels alors $F = \bigcap\limits_i F_i$ est aussi un sous espace vectoriel.

<u>Remarque :</u>
L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous espace vectoriel à moins que l'un soit inclus dans l'autre.

Définition 1.6
U est une ***combinaison linéaire*** *des vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$ si U peut s'écrire*
$U = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i.V_i$ *où* $\forall i \in \{1, ..., n\} : \alpha_i \in K$.

Proposition 1.4
L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E.

2 Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Dans la suite de ce cours, nous ne nous intéresserons qu'aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit donc des vecteurs à n composantes.

2.1 Opérations de base

Pour additionner deux vecteurs, il suffit de sommer composante par composante.

Soient $U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, alors $U+V$ est le vecteur $\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$.

D'après les propriétés de groupe de la somme, nous savons que la somme des vecteurs est commutative, associative, admet comme élément neutre le vecteur nul (toutes les composantes sont nulles). D'autre part, nous ne pouvons bien sûr additionner que deux vecteurs ayant le même nombre de composantes.

Pour multiplier par un scalaire (réel), il suffit de multiplier chaque composante par ce réel.

Soient $U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda.U$ est le vecteur $\begin{pmatrix} \lambda.u_1 \\ \lambda.u_2 \\ \vdots \\ \lambda.u_n \end{pmatrix}$.

D'après les propriétés d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, nous savons que le produit par un scalaire est associatif et distributif sur la somme de vecteurs.

2.2 Produit scalaire

Définition 2.1

Soient $U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *et* $V \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, *deux vecteurs du même espace* $\mathbb{R}^n$, *on définit le produit scalaire et on note :*

$$< U|V >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i (= u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n).$$

On le note aussi $U.V$ *ou* $< U, V >$.

<u>Remarque :</u>
Le produit scalaire de vecteurs à nombre de coordonnées différentes n'est pas défini.

Proposition 2.1

Le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

(i) Il est commutatif : $< U|V >=< V|U >$.

(ii) Il est associatif par rapport au scalaire :
$< \lambda U|V >= \lambda < U|V >$.

(iii) Il est distributif par rapport à l'addition de vecteurs : $< U+V|W >=< U|W > + < V|W >$.

Définition 2.2

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque l'angle formé par ces vecteurs est un angle droit.

Proposition 2.2

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $< U|V >= 0$.

2.3 Norme Euclidienne

Définition 2.3

Soit E *un espace et soit* N *une application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$. *On dit que* N *est une*

norme *si :*

(i) $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

(ii) $\forall X \in E$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $N(\lambda.X) = |\lambda| .N(X)$.

(iii) $\forall X, Y$ *de* E : $N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$ *(inégalité triangulaire).*

Remarque :
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme s'appelle un espace vectoriel normé.

Définition 2.4

On appelle ***norme euclidienne*** *la norme sur* $\mathbb{R}^n$ *suivante :* $N(X) = \sqrt{X.X}$.

Cette norme est notée $N(X) = ||X||$.

Il est, en effet, facile de vérifier que ceci définit bien une norme.

Proposition 2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

La norme euclidienne vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$|X.Y| \leq ||X|| \, ||Y||$.

Définition 2.5

On dit qu'un vecteur est ***normé*** *lorsque sa norme vaut* 1.

2.4 Distance Euclidienne

Définition 2.6

Soit E *un espace et soit* d *une application de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}^+$. *On dit que* d *est une* ***distance*** *si :*

(i) $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

(ii) $\forall X, Y$ *de* E : $d(X,Y) = d(Y,X)$.

(iii) $\forall X, Y, Z$ *de* E : $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ *(inégalité triangulaire).*

Remarque :
Un ensemble muni d'une distance s'appelle un espace métrique.

Exercice :
Montrer que si N est une norme, alors $d(X,Y) = N(X-Y)$ est une distance.

Définition 2.7
On appelle ***distance euclidienne*** *la distance sur* $\mathbb{R}^n$ *définie par :*

$$d(X,Y) = ||X-Y|| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

2.5 Représentation graphique

Les vecteurs de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ se représentent facilement graphiquement.