UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

UFR de GESTION

MATHEMATIQUES APPLIQUEES A L'ECONOMIE ET A LA GESTION

LICENCE 1ère année

ANALYSE

Cours de Marion GOFFIN

Correction du TD 3

Jean-Pierre AMELLAOUI

2ème semestre

ANNEE 2020-2021

Exercice 1 :

Calculez les dérivées suivantes :

a) $y=\ln\left(\sqrt{1+x}\right)$ c) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ d) $y=x\left(x+\sqrt{x}\right)^3$

e) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ f) $y=\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

Correction 1:

a) **Dérivée de** $y = ln(\sqrt{1+x})$.

Rappelons que $y = ln(\sqrt{1+x})$ est l'équation de la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto ln(\sqrt{1+x})$.

$f(x)$ est de la forme $ln(u(x))$ avec $u(x) = \sqrt{1+x}$ dont le domaine de définition est $[-1; +\infty[$. Le domaine de définition de f est donc $]-1; +\infty[$ où l'on a exclu le -1 car ln n'est pas définie en 0. f est donc dérivable sur $]-1, +\infty[$.

Rappelons la formule de dérivation: $(ln(u))' = \frac{u'}{u}$. On a alors, puisque $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, donc, $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})^2} = \frac{1}{2(x+1)}$. On peut aussi écrire $y'(x) = \frac{1}{2(x+1)}$ ou lorsqu'il n'a pas d'ambiguïté comme dans certaines disciplines telles que les équations différentielles où l'on écrit plutôt $y' = \frac{1}{2(x+1)}$.

c) **Dérivée de**: $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Rappelons que a la racine cubique d'un réel x est l'unique nombre réel noté $\sqrt[3]{x}$ dont le cube est égal à x. On a alors pour tout réel x, $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ de même, $\sqrt[3]{x^3} = x$. Les Propriétés algébriques de la racine carré s'étendent à la racine cubique. En particulier, pour tous réels a et b, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$.

Rappelons que l'on peut aussi écrire $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. De même, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$.

Rappelons ensuite la règle de dérivation: Pour tout réel $\alpha > 0$, $(u^\alpha)' = \alpha \times u' \times u^{\alpha-1}$, donc, $y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + (-\frac{1}{3})x^{-\frac{1}{3}-1} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$. En utilisant la notation avec la racine cubique on trouve, $y' = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$.

d) **Dérivée de**: $y = x(x + \sqrt{x})^3$.

y est un produit de deux fonctions $u(x) = x$ et $v(x) = (x + \sqrt{x})^3$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 3(x+\sqrt{x})^2\times(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$, Ainsi, $y' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = 1\times(x+\sqrt{x})^3+x\times 3(x+\sqrt{x})^2\times(x+\frac{1}{2\sqrt{x}})$

$y' = (x + \sqrt{x})^2[x + \sqrt{x} + 3x(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})] \Leftrightarrow y' = (x + \sqrt{x})^2[x + \sqrt{x} + 3x + 3\frac{x}{2\sqrt{x}})] \Leftrightarrow$

$y' = (x + \sqrt{x})^2[4x + \sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}] \Leftrightarrow y' = (x + \sqrt{x})^2[4x + \frac{5}{2}\sqrt{x}]$. On a utilisé la transformation: pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$.

e) **Dérivée de** $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$

y est le quotient de deux fonctions: $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 - 1$. u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$. v est située au dénominateur, elle doit être non nulle. On doit exclure -1 et 1. Ainsi, la fonction $x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Donc,

$y' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(x^2-1)-\sqrt{x}\times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-4x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2-1}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$

f) **Dérivée de** $ln(\frac{1}{1+x^2})$

On applique ici la formule de dérivation $(ln(u))' = \frac{u'}{u}$, où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dont la dérivée est $u(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ où l'on utilisé la formule de dérivation: $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$.

$y' = \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{1} = -\frac{2x}{1+x^2}$.

Exercice 2 :

Déterminez:

a) L'équation de la tangente à la courbe C d'équation $y = x^3 - 4x + 1$ au point de coordonnées (0 ;+1)

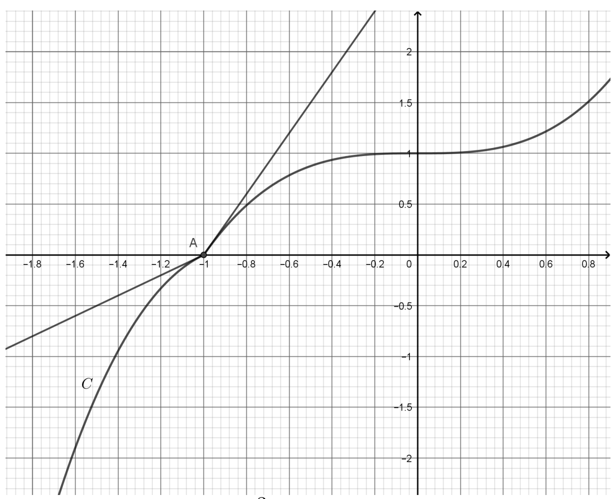
b) L'équation de la tangente à la courbe C d'équation $y = x^3 - x + |x+1|$ au point de coordonnées (-1 ;0)

Correction 2:

a) Rappelons l'équation de la tangente à la courbe C d'une fonction f en un point $A(a, f(a))$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Ici la fonction f est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 - 4x + 1$ et dont la fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 4$.
le point A est le point de coordonnées $(0; 1)$. On obtient: $f'(0) = -4$ et $f(0) = 1$, d'où l'équation de la tangente: $y = -4(x-0) + 1$, c'est à dire, $y = -4x + 1$.

b) Ici la fonction f est définie par: $f(x) = x^3 - x + |x+1|$. Comme nous l'avons signalé au TD1 la fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 donc, la fonction $x \longmapsto |x+1|$ n'est pas dérivable en -1 et par conséquent f n'est pas dérivable en -1. Il donc illusoire de croire à l'existence d'une tangente à la courbe au point d'abscisse -1. par contre la courbe admet deux demies tangentes en ce point. C'est ce que nous allons déterminer. Pour cela remarquons que f est définie par:

$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & si \quad x \geq -1 \\ x^3 - 2x - 1 & si \quad x < -1 \end{cases}$. La courbe de f et les demies tangentes sont donnéés ci-dessous:



$y = x^3 - x + |x+1|$

La tangente à droite de -1 est définie par: $y = f'_d(-1)(x+1) + f(-1) \Leftrightarrow y = 3(x+1)$ et la tangente à gauche de -1 est définie par: $y = f'_g(-1)(x+1) + f(-1) \Leftrightarrow y = x + 1$. En effet $f'_d(x) = 3x^2$ donc $f'_d(-1) = 3$ et $f(-1) = 0$, de même, $f'_g(x) = 3x^2 - 2$, donc, $f'_g(-1) = 1$.

Exercice 3 :

Soit f f(x)= $x^2 + 3x - 1$

1- Quelle est l'expression de la différentielle de $\frac{1}{f}$?

2- Quelle est la différentielle de $\frac{1}{f}$ au point 1 ?

Correction 3:

Rappelons que la différentielle en un point $a \in \mathbb{R}$ d'une fonction f dérivable en a est l'application linéaire notée df_a définie par: $df_a(x) = f'(a)dx$

1) Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$, la fonction $g : x \longmapsto (\frac{1}{f})(x)$ est dérivable dans son domaine de définition et $g'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ Ainsi, la différentielle de g est définie par: $dg_a(x) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}dx$.
On a alors $f'(a) = 2a + 3$ donc, $dg_a(x) = -\frac{2a+3}{(a^2+3a-1)^2}dx$.

2) Si $a = 1$, la différentielle de $\frac{1}{f}$ au point 1 est donc définie par $d(\frac{1}{f})_1(x) = -\frac{f'(1)}{(f(1))^2}dx$, avec $f'(1) = 5$ et $f(1) = 3$, donc, $d(\frac{1}{f})_1(x) = -\frac{5}{9}dx$

Exercice 4 :

Déterminer la différentielle au point x=1 de la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x+lnx}$

On suppose que l'on a $x = t^2 - 3$: déterminez la différentielle de fog au point t=2.

Correction 4:

La fonction f est dérivable dans son domaine de définition D_f et pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
où, $u(x) = e^x$ et $v(x) = x + ln\ x$. On a alors, $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.
Donc, $f'(x) = \frac{e^x(x+ln(x))-e^x(1+\frac{1}{x})}{(x+lnx)^2}$ ou encore, $f'(x) = \frac{e^x[x+ln(x)-1-\frac{1}{x}]}{(x+lnx)^2}$.

Ainsi, la différentielle df_1 est définie par: $df_1(x) = f'(1)dx \Leftrightarrow df_1(x) = \frac{e^1[1+ln(1)-1-1]}{(1+ln(1))^2}$
$df_1(x) = (-e)dx$.

Rappelons que si g est dérivable sur un intervalle I et f est dérivable sur $g(I)$ alors fog est dérivable sur I et $(fog)'(x) = g'(x) \times f'((g(x))$.

Ici, $f(x) = \frac{e^x}{x+ln\ x}$ et $g(t) = t^2 - 3$. Or, $f'(x) = \frac{e^x[x+ln(x)-1-\frac{1}{x}]}{(x+ln\ x)^2}$ et $g'(t) = 2t$, ainsi,

$(fog)'(t) = g'(t) \times f'(g(t)) \Leftrightarrow (fog)'(t) = 2t \times \frac{e^{t^2-3}[t^2-3+ln(t^2-3)-1-\frac{1}{t^2-3}]}{(t^2-3+ln(t^2-3))^2}$.

D'où, $(fog)'(2) = 4\frac{e^1[1+ln(1)-1-\frac{1}{1}]}{(1+ln(1))^2} = \frac{-4e}{1^2} = -4e$

Ainsi, la différentielle de fog en 2 est définie par: $d(fog)_2(t) = (-4e)dt$.