Compléments sur le chapitre 1 : Espaces vectoriels

Exemple 1 :

1/ Montrons que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif :

(i) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ OK

(ii) $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 + x = x + 0 = x$ OK

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, y := -x \in \mathbb{R} \,/\, x + (-x) = 0$ OK

(iv) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = y + x$ OK

Donc $(\mathbb{R}, +)$ est bien un groupe abélien.

2/ Vérifions si $(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe :

(i) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ OK

(ii) $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 \times x = x \times 1 = x$ OK

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists!\, y \in \mathbb{R}$ tq $x \times y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

Or $y = \frac{1}{x}$ n'est défini que pour les $x \neq 0$ donc

$(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe mais $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe.

De plus,

(iv) $\forall (x, y) \in {\mathbb{R}^*}^2, \quad x \times y = y \times x$ OK

Donc $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe abélien.

Exemple 2 :

1/ Montrons que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif :

a) $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien. En effet :

(i) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ OK

(ii) $\exists\, 0 \in \mathbb{Z} \,/\, \forall x \in \mathbb{Z}, \quad 0 + x = x + 0 = x$ OK

(iii) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists\, y = -x \in \mathbb{Z} \,/\, x + (-x) = 0$ OK

(iv) $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad x + y = y + x$ OK

b) $\times$ est associative. En effet :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3,\ x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ OK

c) $\times$ est distributive à droite et à gauche sur +. En effet :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3,\ x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ et
$(x+y) \times z = x \times z + y \times z$ OK.

d) $\times$ admet un élément neutre. En effet :
$\exists 1 \in \mathbb{Z} \,/\, \forall x \in \mathbb{Z},\ 1 \times x = x \times 1 = x$ OK.

e) $\times$ est commutative. En effet :
$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ x \times y = y \times x$ OK.

Donc $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

2/ Pour montrer que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif, il faut vérifier que :

a) $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau commutatif : immédiat.

b) $\forall x \in \mathbb{Q}^*,\ \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} \,/\, x \times y = \underbrace{1}_{\text{élément neutre}}$ OK.

Donc $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif. ☐

Exemple 3 :

Montrons que $\left\{\begin{array}{l}(\mathbb{R}, +, \cdot)\\ (\mathbb{R}, +, \times)\end{array}\right.$ est un $\mathbb{R}$-ev ou un e.v. réel.

a) $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif : OK d'après l'exemple 1.

b) • $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \times (x+y) = \lambda \times x + \lambda \times y$ OK

• $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda + \mu) \times x = \lambda \times x + \mu \times x$ OK

• $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \times (\mu \times x) = (\lambda \times \mu) \times x$ OK

• $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \times x = x$ OK

Donc $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

. Démonstration de la proposition 1.1 : Non

Soit E un K-e.v. On notera $\oplus$ par $+$ (notation moins lourde).

1/ Soit $x \in E$ et soient $\lambda, \mu \in K$, d'après (6) on a :

$$(\lambda-\mu)x+\mu\cdot x = [(\lambda-\mu)+\mu].x$$
$$= \lambda\cdot x$$
D'où $(\lambda-\mu)\cdot x = \lambda\cdot x - \mu\cdot x$. $(*)$

En prenant $\lambda=\mu$ dans $(*)$, on a : $0.\ x = 0$.

2/ Soient $x, y \in E$ et soit $\lambda \in K$, d'après (5), on a :
$$\lambda.(x-y)+\lambda.y = \lambda.[(x-y)+y]$$
$$= \lambda.x$$
D'où $\lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y$. $(**)$

En prenant $x=y$ dans $(**)$, on a $\lambda.0=0$.

3/ Prenons $\lambda=0$ dans $(*)$, on a :
$$(-\mu).x = -(\mu.x)$$
De plus, en prenant $x=0$ dans $(**)$, on a :
$$\lambda.(-y) = -(\lambda.y).$$
D'où $\forall x\in E$, $\forall \lambda\in K$, $(-\lambda).x = -(\lambda.x) = \lambda.(-x)$.

4/ Soit $x\in E$ et $\lambda\in K$.

a) Si $\lambda=0$ ou $x=0$ alors d'après 1. et 2. de la proposition 1.1, on a $\lambda.x=0$.

b) Si $\lambda.x=0$ et $\lambda\neq 0$ alors $\frac{1}{\lambda}$ existe et on a :
$$x \underset{\substack{\text{d'après 8/ de la}\\ \text{déf. 1.4}}}{=} 1.x = \left(\frac{1}{\lambda}.\lambda\right).x \underset{\substack{\text{d'après 7/ de la}\\ \text{déf. 1.4.}}}{=} \frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = \frac{1}{\lambda}.0 \underset{\substack{\text{d'après 2.}\\ \text{de la proposition 1.1}}}{=} 0.$$
$\boxtimes$

Exemple 5 :

- $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ 2x+y-z=0\}$.
- Soient $(x,y,z), (x',y',z')\in A$ et soient $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$.
- A-t-on $\lambda.(x,y,z)+\mu(x',y',z')\in A$?

Or $\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z') = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')$

et $2(\lambda x+\mu x')+\lambda y+\mu y'-(\lambda z+\mu z')$
$$= 2\lambda x+2\mu x'+\lambda y+\mu y'-\lambda z-\mu z'$$

$= \lambda (\underbrace{2x + y - z}_{= 0 \text{ car } (x,y,z) \in A \text{ par hyp}}) + \mu (\underbrace{2x' + y' - z'}_{= 0 \text{ car } (x';y';z') \in A \text{ par hyp.}})$

$= 0$.

Donc $\lambda(x,y,z) + \mu(x';y';z') \in A$ et A est bien un sev de $\mathbb{R}^3$.

$\square$

Démonstration de la proposition 1.3 : (*)

Soient $x, y \in F := \bigcap_{i \in I} F_i$ alors $\forall i \in I$, x et $y \in F_i$ et comme F_i est un sev par hypothèse, on a $x + y \in F_i$ donc $x + y \in F$.

De même, si $x \in F$ et si $\lambda \in K$ alors $\forall i \in I$, $x \in F_i$ et comme F_i est un sev par hypothèse, on a $\lambda . x \in F_i$ donc $\lambda . x \in F$

Ainsi, $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v.

$\square$

(*) Rappel : $\bigcap_{i \in I} F_i = \{ x \ / \ \forall i \in I, \ x \in F_i \}$

$\bigcup_{i \in I} F_i = \{ x \ / \ \exists i \in I, \ x \in F_i \}$.

Démonstration de la proposition 1.4.

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs de E et soient $x, y \in F$. Donc, $\exists \ x_1, \dots, x_n ; y_1, \dots, y_n \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n ; \mu_1, \dots, \mu_n \in K$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i .$$

Alors $x + y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i = (\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1) + \dots + (\lambda_n x_n + \mu_n y_n)$

et $\lambda x = \lambda . \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = (\lambda \lambda_1) x_1 + \dots + (\lambda \lambda_n x_n)$

sont aussi des combinaisons linéaires de n vecteurs de E donc $x+y \in F$ et $\lambda x \in F$, ce qui prouve que F est un sev de E. 3/

$\boxdot$

Démonstration de la proposition 2.1 : Non

(i) Soient $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\langle U / V \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = \langle V / U \rangle$$

(ii) Soit $\lambda \in K$, on a :

$$\langle (\lambda U) / V \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i) \cdot v_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \lambda \cdot \langle U / V \rangle$$

(iii) Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\langle (U+V) / W \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) \cdot w_i = \sum_{i=1}^{n} (u_i w_i + v_i w_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u_i w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \langle U / W \rangle + \langle V / W \rangle.$$

$\boxdot$

Exercice : Non

Soit $d(X,Y) = N(X-Y)$ où N est une norme. Montrons que d est une distance. $d \geq 0$ car $N \geq 0$.

(i) $d(X,Y) = 0 \iff N(X-Y) = 0$
$\iff X - Y = 0$
$\iff X = Y$

(ii) $d(X,Y) = N(X-Y)$
$:= \sqrt{\langle (X-Y) / (X-Y) \rangle}$
$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$

$$= \sqrt{\langle (Y-X), (Y-X) \rangle}$$
$$= N(Y-X)$$
$$= d(Y, X).$$

(iii) $d(X, Z) = N(X-Z)$
$$= N((X-Y)+(Y-Z))$$
$$\leq N(X-Y) + N(Y-Z) = d(X, Y) + d(Y, Z). \quad \square$$

Section 2.5 : représentation graphique :