UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

UFR de GESTION
TD-1
Espace vectoriel
Licence 1ère année

Exercice 1:

Calculer:

(i) $6\,(1,3,2)+2\,(2,1,4,1)=(6,18,12)+(4,2,8,2)=$ impossible.

(ii) $3\,(1,2,3)-2\,(3,1,1)+a\,(2,1,2)=(3,6,9)-(6,2,2)+(2a,a,2a)=(2a-3,a+4,2a+7)$.

(iii) $(1,3,5,2)\,.\,(2,1,3,-4)=1.2+3.1+5.3-2.4=2+3+15-8=12$.

(iv) $\|(2,1,-1)\|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

(v) $\|(1,3,-2)\|+\|(4,-3)\|=\sqrt{1+9+4}+\sqrt{16+9}=\sqrt{14}+\sqrt{25}=5+\sqrt{14}$.

(vi) $d\,((1,3)\,;(3,2,1))=$ impossible.

(vii) $d\,((1,2)\,;(3,3))=\sqrt{(1-3)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

(viii) $(3,-1,2)\,.\,(2,1,-1)+\|(4,0,-3)\|=6-1-2+\sqrt{4^2+(-3)^2}=3+\sqrt{25}=8$.

Exercice 2:

Déterminer a et b tels que:

(i) $(2,1+a,a+b)=(1,3,0)+2\,(0,-2,1)=(1,-1,2)$ impossible

(ii) $(1,a,a-b)=2\,(1,3,0)-(1,-2,1)=(2,6,0)-(1,-2,1)=(1,8,-1)$

Donc en identifiant $a=8$ et $a-b=-1$ d'où $b=9$

(iii) $\left\|\left(1,-\sqrt{2},1+a\right)\right\|=2\sqrt{3}$

$\left\|\left(1,-\sqrt{2},1+a\right)\right\|=\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2+(1+a)^2}=2\sqrt{3}$

donc $3+(1+a)^2=12\Leftrightarrow(1+a)^2=9$

On obtient donc $1+a=3$ soit $a=2$

Ou $1+a=-3$ soit $a=-4$

(iv) $d\,((a,0,1)\,,(1,2a,0))=2$

$\sqrt{(a-1)^2+(2a)^2+1^2}=2\Leftrightarrow(a-1)^2+4a^2+1=4\Leftrightarrow a^2-2a+1+4a^2+1=4\Leftrightarrow$ $5a^2-2a-2=0$

$\Delta=4+40=44=4*11$ donc $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{11}$

On a deux solutions possibles:

$a_1=\frac{2-2\sqrt{11}}{10}=\frac{1-\sqrt{11}}{5}$ ou $a_2=\frac{1+\sqrt{11}}{5}$

Exercice 3:

Expliquez aux étudiants la convention suivante (afin d'éviter d'avoir à écrire L"" au bout de 5 équivalences). Le sigle L_1 fait référence à la ligne 1 du tableau précédent. Le sigle L_1' fait référence à la ligne 1 du tableau en cours. De plus on omet souvent d'écrire $L_1' =$ pour ne mettre que le résultat ainsi au lieu de $L_2' = L_2 - 2L_1'$ on met uniquement $L_2 - 2L_1'$.

Résoudre les systèmes suivants:

(i) $\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=-3 \\ 2x-2y=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y=2 & L_1'=L_1 \\ y+z=-3 & L_2'=L_2 \\ -4y=12 & L_3'=L_3-2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ z=0 \\ y=-3 \end{array}\right.$

Ainsi $(x,y,z)=(5,-3,0)$.

(ii) $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=2 \\ 2x+2y=4 \\ -x+y/2+3z/2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y=2 & L_2/2 \\ 2x+y-z=2 & L_1 \\ -x+y/2+3z/2=1 & L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{ll} x+y=2 & L_1 \\ -y-z=-2 & L_2-2L_1' \\ +3y/2+3z/2=3 & L_3+L_1' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y=2 & L_1 \\ y+z=2 & -L_2 \\ y+z=2 & \frac{2}{3}L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y=2 & L_1 \\ y+z=2 & -L_2 \end{array}\right.$

Les deux dernières équations sont équivalentes: le système est sous déterminé. On prend z comme paramètre on obtient:

$\left\{\begin{array}{l} x=2-y \\ y=2-z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=2-z \end{array}\right.$

La solution est un sous espace affine:

$S=(0,2,0)+z\,(1,-1,1)$

(iii) $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-3z=-1 \\ -x+3y+2z=7 \\ 3x+5y-4z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x-3y-2z=-7 & -L_2 \\ 2x+y-3z=-1 & L_1 \\ 3x+5y-4z=2 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x-3y-2z=-7 & \\ 7y+z=13 & L_2-2L_1 \\ 14y+2z=23 & L_3-3L_1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3y-2z=-7 \\ 7y+z=13 \\ 7y+z=23/2 \end{array}\right.$ Les deux dernières équations sont incompatibles.

OU$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x-3y-2z=-7 & \\ 7y+z=13 & \\ 0=23/2-13 & L_3-L_2 \end{array}\right.$ La dernière équation est impossible.

Le système n'admet donc pas de solution.

(iv) $\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=3 \\ x+3y-3z=2 \\ -2x-3y+z=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+2y-z=3 & \\ y-2z=-1 & L_2-L_1 \\ y-z=2 & L_3+2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+2y-z=3 & \\ y-2z=-1 & \\ z=3 & L_3-L_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-2y+z=-4 \\ y=-1+2z=5 \\ z=3 \end{array}\right.$

La solution est donc $(x,y,z)=(-4,5,3)$.

(v) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y+z+t=-1 \\ x+y-2z+3t=5 \\ y+2z-t=0 \\ -x-y+z-t=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y-2z+3t=5 & L_2 \\ 2x-y+z+t=-1 & L_1 \\ y+2z-t=0 & \\ -x-y+z-t=-4 & \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y-2z+3t=5 & \\ -3y+5z-5t=-11 & L_2-2L_1' \\ y+2z-t=0 & \\ -z+2t=1 & L_4+L_1' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y-2z+3t=5 & \\ y+2z-t=0 & L_3 \\ -3y+5z-5t=-11 & L_2 \\ -z+2t=1 & \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y-2z+3t=5 & \\ y+2z-t=0 & \\ 11z-8t=-11 & L_3+3L_2' \\ -z+2t=1 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y-2z+3t=5 & \\ y+2z-t=0 & \\ z-2t=-1 & -L_4 \\ 11z-8t=-11 & L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y-2z+3t=5 & \\ y+2z-t=0 & \\ z-2t=-1 & \\ 14t=0 & L_4-11L_3' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-y+2z-3t=1 \\ y=t-2z=2 \\ z=-1+2t=-1 \\ t=0 \end{array}\right.$$

La solution est donc $(x,y,z,t)=(1,2,-1,0)$.

(vi) $$\left\{\begin{array}{l} x+3y+z=2 \\ 3x+y-z=2 \\ \alpha x+3y+2z=\alpha+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+3y+z=2 & \\ -8y-4z=-4 & L_2-3L_1' \\ (3-3\alpha)\,y+(2-\alpha)\,z=1-\alpha & L_3-\alpha L_1' \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+3y+z=2 & \\ y+z/2=1/2 & -L_2/8 \\ (3-3\alpha)\,y+(2-\alpha)\,z=1-\alpha & \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+3y+z=2 & \\ y+z/2=1/2 & -L_2/8 \\ (2-\alpha-(3-3\alpha)/2)\,z=1-\alpha-(3-3\alpha)/2 & L_3-(3-3\alpha)\,L_2' \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+z=2 \\ y+z/2=1/2 \\ (4-2\alpha-3+3\alpha)\,z=2-2\alpha-3+3\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y+z=2 \\ y+z/2=1/2 \\ (1+\alpha)\,z=-1+\alpha \end{array}\right.$$

Si $\alpha=-1$ la dernière équation est en fait $0=-2$ donc le système est impossible et il n'y a pas dans ce cas de solution.

Sinon:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-3y-z=\frac{2\alpha+2-3-\alpha+1}{\alpha+1}=\frac{\alpha}{\alpha+1} \\ y=1/2.\,(1-z)=\frac{1}{2}\,\frac{\alpha+1-\alpha+1}{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha+1} \\ z=\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \end{array}\right.$$

La solution si $\alpha\neq-1$ est donc: $(x,y,z)=\left(\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{1}{\alpha+1},\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$.