CHAPITRE V : LA FONCTION DE PRODUCTION

Le comportement du producteur est semblable à celui du consommateur. Le producteur a une fonction de production, il ne recherche pas toujours le profit maximum contrairement au consommateur qui recherche la satisfaction maximum.

SECTION I : TECHNIQUE DE PRODUCTION ET FONCTION DE PRODUCTION

I] Les caractéristiques des facteurs de production

1) La divisibilité

La divisibilité est la possibilité d'utiliser un facteur de production dans d'aussi petite quantité que l'on souhaite. Lorsque la divisibilité est infinie, on dit parfois « parfaite », alors la fonction de production pourra être continue. Il existe des facteurs de production qui ne sont pas divisible facilement, on dit que la divisibilité du facteur travail n'est pas finie, elle n'est pas « parfaite ».

2) L'adaptabilité

L'adaptabilité est la possibilité d'associer à une unité d'un facteur de production donné, un nombre variable d'unité d'un autre facteur. L'exemple classique d'un facteur adaptable est dans le domaine agricole comme la terre.

3) La substituabilité ou la complémentarité des facteurs

On dit que des **facteurs de production sont substituables** s'ils sont à la fois parfaitement divisibles et adaptables. Dans ce cas, le producteur peut remplacer une certaine quantité d'un facteur par une certaine quantité d'un autre facteur, à niveau de production égal. Dans le cas où une quantité donnée d'un facteur ne peut être associé qu'à une quantité déterminée d'un autre facteur, alors on dit que les facteurs sont complémentaires.

4) Variabilité ou fixité des facteurs

Ces caractéristiques ne peuvent se concevoir que dans un cadre temporel. Soit une période donnée de temps, pendant cette période on constate généralement que certains facteurs sont variables et d'autres sont fixes :

– Un facteur est fixe lorsque sa quantité ne peut pas être modifiée pendant la période de temps considéré
– Un facteur est variable lorsque sa quantité peut être modifiée pendant la période de temps considéré

Lorsqu'on allonge la durée de cette période, les facteurs fixes deviennent des facteurs variables. Finalement, la distinction entre fixe et variable, dépend de la durée de la période de temps considéré :

– La courte période se définie comme une période suffisamment brève pour que certains facteurs soient considérés comme fixes.

– La longue période se définie comme une période où les facteurs fixes deviennent variables. Cette distinction est très importante.

II] La fonction de production en courte période

1) Les différentes productivités

Dans une production agricole, on considère qu'elle est fonction de deux facteurs principaux : le travail (L) et la terre disponible (T). La terre à court terme est fixe, et le travail est variable. On a la fonction de production suivante :

$$Q = f(T, L)$$

Comme nous sommes en courte période, on considère que la surface de terres cultivées est fixe, elle ne peut pas varier à court terme. Seul le nombre d'ouvriers embauchés ou le nombre d'heures totales de travail peut varier. La fonction de production à court terme s'écrit alors :

$$Q = f(T_0, L)$$

Il y a différentes productivités :

- **La productivité physique totale** du facteur travail est égale à Q (où Q est la production)
- **La productivité physique moyenne** du facteur travail s'écrit :

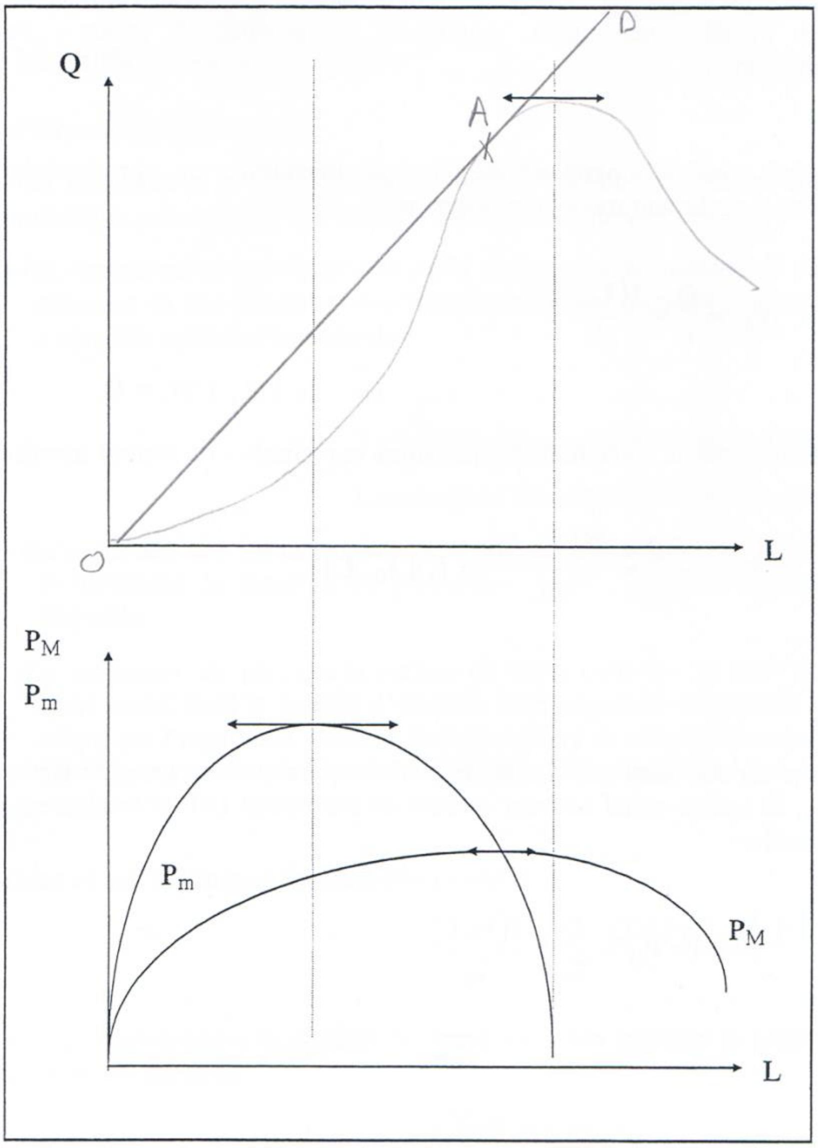
$$\boxed{P_M = \frac{Q}{M} = \frac{f(T_0, L)}{L}}$$

- **La productivité physique marginale** du facteur travail s'écrit :

$$\boxed{P_m = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial f(T_0, L)}{\partial L} = f'_L(T_0, L)}$$

La représentation graphique généralement a la forme d'une fonction dite en S avec sur le graphique supérieur la production et sur le graphique inférieur la productivité moyenne et marginale.

Les productivités



2) La loi de la productivité marginale décroissante

Les économistes se sont très vite intéressés à une question : comment évolue la production Q lorsqu'on associe de plus en plus de facteur variable à une quantité donné de facteur fixe ? Les économistes retiennent comme principe général de fonctionnement que l'accroissement de la production sera tôt au tard plus faible que l'accroissement du facteur variable : c'est ce que l'on appelle la loi de la productivité marginale décroissante ou la loi des rendements décroissantes ou encore l'hypothèse des rendements factoriels décroissants.

Mathématiquement la loi de la productivité marginale décroissante suppose que :

$$[P_m]' = \left[\frac{\partial f}{\partial L}\right]' = \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} < 0$$

3) Les points caractéristiques

a) La productivité marginale atteint son maximum lorsque la production atteint son point d'inflexion

Dans le schéma 1, la pente de la tangente augmente jusqu'à arriver au point d'inflexion où elle sera verticale : la productivité marginale augmente à gauche du point d'inflexion. Il en est de même dans l'autre sens, la pente de la tangente diminue jusqu'à arriver au point d'inflexion où elle sera horizontale : la productivité marginale diminue à droite du point d'inflexion.

b) La production atteint son maximum lorsque la productivité marginale est nulle

La tangente à la courbe est horizontale, le coefficient directeur est nulle, la dérivée et la productivité marginale sont donc nulles.

c) La courbe de la productivité marginale coupe celle de la productivité moyenne en son maximum

$$P_M = \frac{f(T_0, L)}{L}$$

La courbe P_m coupe la courbe P_M en son maximum :

$$\begin{aligned}
P'_M = 0 &\Leftrightarrow \frac{L.f'_L(T_0, L) - f(T_0, L)}{L^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{L.f'_L(T_0, L)}{L^2} = \frac{f(T_0, L)}{L^2} \\
&\Leftrightarrow f'_L(T_0, L) = \frac{f(T_0, L)}{L} \\
&\Leftrightarrow P_m = P_M
\end{aligned}$$

d) La productivité moyenne est croissante lorsque la productivité marginale lui est supérieure, la productivité moyenne est décroissante lorsque la productivité marginale lui est inférieure

Tant que l'usage d'une unité supplémentaire apporte plus que la moyenne des unités déjà employées cela a pour conséquence d'accroître la moyenne. Lorsque l'unité supplémentaire provoque un accroissement de la production inférieur à ce que procurent en moyenne les unités précédentes, alors la productivité moyenne baissera.

Remarque : il existe d'autre représentation possible de la fonction de production et notamment la fonction dite de Cobb-Douglas qui correspond à une fonction de production où la loi de la décroissance marginale est immédiatement vérifiée.

III]La fonction de production en longue période

La caractéristique de la longue période est que tous les facteurs sont variables. Nous allons nous poser la question ce qui va se passer lorsqu'on fait varier tous les facteurs. On peut difficilement répondre à cette question de manière théorique. En revanche, on peut théoriser lorsqu'on fait varier tous les facteurs en même temps, dans le même sens et dans les mêmes proportions. Cette situation fait référence à ce que l'on appelle en économie **les rendements d'échelle.**

Remarque : dans la réalité, tous les facteurs ne varient pas forcément dans les mêmes proportions (et dans le même sens).

1) La nature des rendements d'échelle

Ne pas confondre le concept de rendement d'échelle avec la loi des rendements décroissants (voir II-2).

Lorsque l'accroissement de la production est exactement proportionnel à l'accroissement des facteurs, on dit qu'il y a rendement d'échelle constant.
Lorsque l'accroissement de la production est plus que proportionnel à l'accroissement des facteurs (respectivement moins), on dit que les rendements d'échelle sont croissants (respectivement décroissants).

Rendements d'échelle : $f(K,L)$

Soit : $\lambda > 1$

- Si : $f(\lambda.K,\lambda.L) = \lambda.f(K,L) \rightarrow$ les rendements sont constants
- Si : $f(\lambda.K,\lambda.L) > \lambda.f(K,L) \rightarrow$ les rendements sont croissants
- Si : $f(\lambda.K,\lambda.L) < \lambda.f(K,L) \rightarrow$ les rendements sont décroissants

2) Les fonctions de production homogènes

Soit une fonction de production $f(K,L)$, on dira que cette fonction est homogène de degré m si pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$\boxed{f(\lambda.K,\lambda.L) = [\lambda^m].f(K,L)}$$

Soit : $\lambda > 1$

- Si $m < 1 \rightarrow$ les rendements sont décroissants
- Si $m = 1 \rightarrow$ les rendements sont constants
- Si $m > 1 \rightarrow$ les rendements sont croissants

Les fonctions homogènes ont deux propriétés :

1. Les dérivées premières d'une fonction homogène de degré m sont des fonctions homogènes de degré m-1
2. Les fonctions homogènes satisfont à l'identité d'Euler :

$$\boxed{K.f_K'(K,L)+L.f_L'(K,L)=m.f(K,L)}$$

Si $m=1$ alors on a : $K.f_K'(K,L)+L.f_L'(K,L)=f(K,L)$, c'est la « règle de l'épuisement du produit ».

SECTION II : FONCTION DE PRODUCTION ET COMPORTEMENT DU PRODUCTEUR

I] Les grandes fonctions de production

1) La fonction de Cobb-Douglas

Cette fonction de production a été trouvée par deux statisticiens par Cobb et Douglas dans les années 1920, ils ont trouvé que bien souvent on pouvait approcher la production d'une entreprise en écrivant la fonction de production de la manière suivante :

$$Q=A.K^{\alpha}.L^{\beta} \text{ avec } A>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$$

Quelles sont les conditions pour que cette fonction de Cobb-Douglas respecte la loi de décroissance des productivités marginales ?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}=\alpha.(\alpha-1).A.K^{\alpha-2}.L^{\beta}<0\rightarrow\alpha<1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}=\beta.(\beta-1).A.K^{\beta-2}.L^{\beta}<0\rightarrow\beta<1$$

Avec cette fonction à long terme, on peut aussi étudier les rendements d'échelle.

$$\begin{aligned} f(\lambda.K,\lambda.L)&=A(\lambda.K)^{\alpha}.(\lambda.L)^{\beta}\\ &=\lambda^{\alpha}.\lambda^{\beta}.A.K^{\alpha}.L^{\beta}\\ &=\lambda^{\alpha+\beta}.A.K^{\alpha}.L^{\beta}\\ &=\lambda^{\alpha+\beta}.f(K,L)\end{aligned}$$

Si $\alpha+\beta=1\longrightarrow$ les rendements d'échelle sont constants

Si $\alpha+\beta>1\longrightarrow$ les rendements d'échelle sont croissants

Si $\alpha+\beta<1\longrightarrow$ les rendements d'échelle sont décroissants

2) Les fonctions de production à facteurs complémentaires

Imaginons que les facteurs K et L sont complémentaires cela signifie que la production de 1 unité nécessite x unités de K et y unités de L avec un lien fixe entre x et y.

Supposons que l'entreprise dispose de K* unité de capital et de L* unité de travail.
Quelle est la production maximale possible de cette entreprise ?

Si elle dispose de K* unité de capital, elle produira au maximum : $\frac{K^*}{x}$ unités d'output (produits finis)

Si elle dispose de L* unité de travail, elle produira au maximum : $\frac{L^*}{y}$

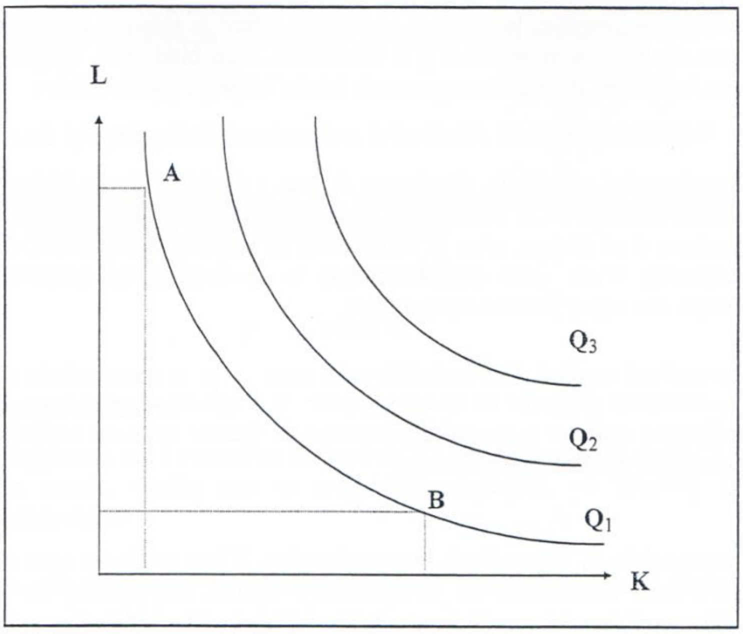
Dans la mesure où l'output nécessite à la fois et dans des proportions strictes l'usage des facteurs K et L, la production maximale ne peut correspondre qu'au minimum des deux valeurs précédentes :

$$f(K,L) = \text{Min}\left\{\frac{K^*}{x}, \frac{L^*}{y}\right\}$$

II] Fonctions de production et isoquants

On appelle isoquant **l'ensemble des combinaisons des facteurs de production permettant d'obtenir le même niveau de production**. Les isoquants ont les mêmes propriétés que les courbes d'indifférences du consommateur (revoir ces propriétés).

Les isoquants : cas où la substitution est imparfaite



III] Le Taux Marginal de Substitution Technique (TMST)

Le TMST du facteur K au facteur L est égal à la quantité additionnelle de facteur K qui est nécessaire pour compenser la perte d'une unité du facteur L afin de maintenir le niveau de production constant.

$$dQ = \frac{\partial f}{\partial K} dK + \frac{\partial f}{\partial L} dL = P_m^K.dK + P_m^L.dL$$

Posons : $dQ = 0$

$$P_m^K.dK + P_m^L.dL = 0 \Leftrightarrow -\frac{dK}{dL} = \frac{P_m^L}{P_m^K}$$

On constate que le TMST est égal au rapport des productivités marginales des facteurs.

Application au calcul du TMST à la fonction de Cobb-Douglas

Les deux méthodes de calcul du TMST peuvent être appliquées :

- *1ère méthode* :

$$Q = A.K^{\alpha}.L^{\beta}$$

$$K^{\alpha} = \frac{Q_0}{A.L^{\beta}} \rightarrow K = \left(\frac{Q_0}{A.L^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{dK}{dL} = g'(L) = \left[L^{-\frac{\beta}{\alpha}}.\left(\frac{Q_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

$$= \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).\left[L^{-\frac{\beta}{\alpha}-1}.\left(\frac{Q_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

$$= \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).\left[\frac{L^{-\frac{\beta}{\alpha}}.\left(\frac{Q_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{L}\right]$$

$$= \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$TMST = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).\left(\frac{K}{L}\right)$$

- *2ème méthode* (à privilégier) :

$$P_m^K = \frac{\partial Q}{\partial K} = A.\alpha.K^{\alpha-1}.L^{\beta}$$

$$P_m^L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A.\beta.K^{\alpha}.L^{\beta-1}$$

$$TMST = \frac{P_m^L}{P_m^K} = \frac{A.\beta.K^{\alpha}.L^{\beta-1}}{A.\alpha.K^{\alpha-1}.L^{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}.\frac{K}{L}$$

$$\boxed{TMST = \frac{\beta}{\alpha}.\frac{K}{L}}$$

Remarque : quel est l'influence d'un changement d'échelle (variation de tous les facteurs dans le même sens, dans la même proportion) sur le TMST ? Quand on a un changement d'échelle d'une entreprise, cela ne remet pas en cause la structure d'échange des facteurs entre eux. Le TMST d'une fonction de Cobb Douglas ne varie pas lorsque l'échelle de production change.

On peut généraliser cette remarque dans le cas des fonctions homogènes. Une fonction homogène est une fonction qui vérifie une propriété spécifique.

IV] Le comportement optimisateur du producteur

Le producteur a deux stratégies possibles :

- Maximisation de la production pour un coût de production donnée
- Minimisation du coût de production pour une quantité donnée

1) Maximisation de la quantité produite pour un coût de production donnée

Le producteur dispose d'un budget B_0. Le problème peut être alors :

Optimisation :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & Q = f(K,L) \\ \text{SC} & B_0 = L.p + K.q \end{array}$$

Remarque : On considère ici que les prix sont des données exogènes, nous étudierons dans le chapitre VII le processus qui permet de fixer les prix.

$$L(L,K,\lambda) = Q + \lambda.[B_0 - L.p - K.q]$$

$$\begin{cases} L'_L\,(K,L,\lambda) = 0 \\ L'_K\,(K,L,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda\,(K,L,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial L} - \lambda.p = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial K} - \lambda.q = 0 \\ B_0 - L.p - K.q = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{p}.\dfrac{\partial f}{\partial L} \\ \lambda = \dfrac{1}{q}.\dfrac{\partial f}{\partial K} \\ B_0 - L.p - K.q = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{p}.\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{1}{q}.\frac{\partial f}{\partial K} \Leftrightarrow \frac{P_m^L}{p} = \frac{P_m^K}{q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_m^L}{P_m^K} = \frac{p}{q}$$

On constate que le multiplicateur de Lagrange, à l'optimum, est égal aux productivités marginales pondérées par le prix des deux facteurs.

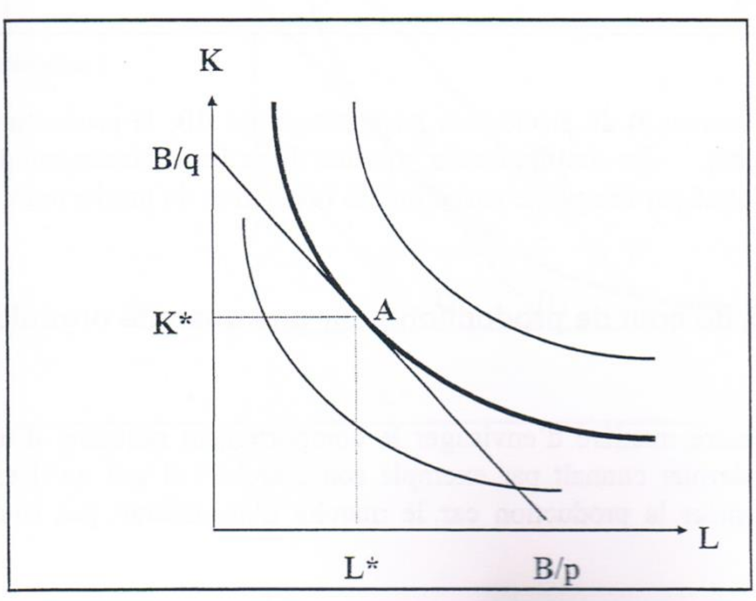
<u>Equation de la droite d'iso-coût :</u>

$$L.p - K.q = B_0$$

$$K = \frac{B_0}{q} - \left(\frac{p}{q}\right).L$$

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial L}}{\dfrac{\partial f}{\partial K}} = \frac{P_m^L}{P_m^K} = \frac{p}{q}$$

L'équilibre du producteur



2) Interprétation du multiplicateur de Lagrange

A partir du système des conditions du 1er ordre, on peut interpréter la différentielle totale du budget de la façon suivante :

$$dB = p.dL + q.dK$$

$$dB = \frac{P_m^L}{\lambda}.dL + \frac{P_m^K}{\lambda}.dK = \frac{1}{\lambda}.\left[P_m^L.dL + P_m^K.dK\right] = \frac{1}{\lambda}.d(Q)$$
$$\rightarrow dQ = \lambda.dB$$

Ainsi, si les ressources B du producteur augmente de dB, alors la production augmentera de $\lambda.dB$.

3) Minimisation du coût de production pour une quantité produite donnée

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & B = p.L + q.K \\ \text{SC} & Q = Q_0 \end{array}$$

$$L(L, K, \lambda) = p.L + q.K + \lambda(Q - Q_0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial L} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial K} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + \lambda.f'_L = 0 \\ q + \lambda.f'_K = 0 \\ Q - Q_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{p}{f'_L} & (1) \\ \lambda = -\dfrac{q}{f'_K} & (2) \\ Q - Q_0 = 0 & (3) \end{cases}$$

Même si le producteur part d'une stratégie différente, il arrive à un résultat identique à celui trouvé dans le 1), c'est-à-dire qu'il atteint l'optimum lorsque le rapport des productivités marginales est égal au rapport des prix. Le producteur n'a pas comme unique objectif de maximiser sa production mais aussi de minimiser ses coûts.

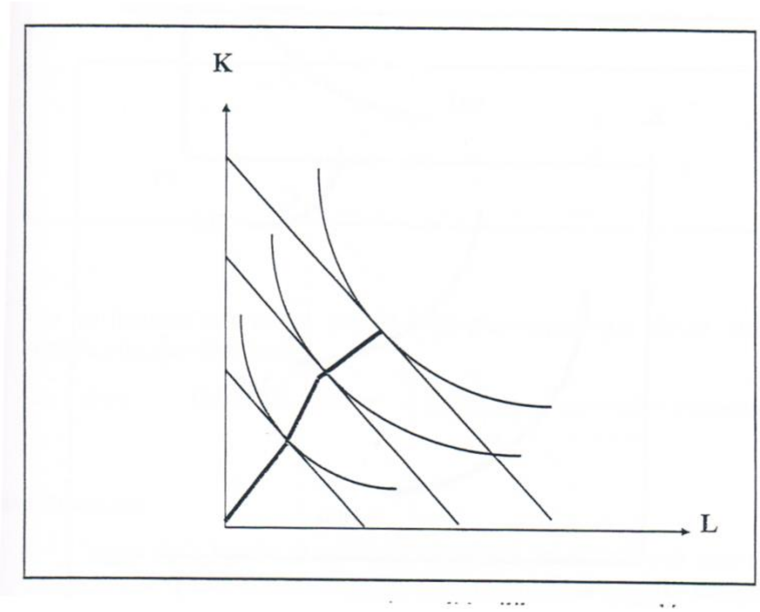
V] L'impact de la variabilité des ressources et des prix

1) Variation du budget du producteur

a) Définition du sentier d'expansion

Lorsque le budget varie, l'équilibre du producteur change. La courbe qui relie tous les points d'équilibre est appelée sentier d'expansion de la firme ou encore ligne d'échelle. Il existe plusieurs cas de figures lorsque l'on souhaite relier la variation du budget à la notion de rendement d'échelle.

Sentier d'expansion

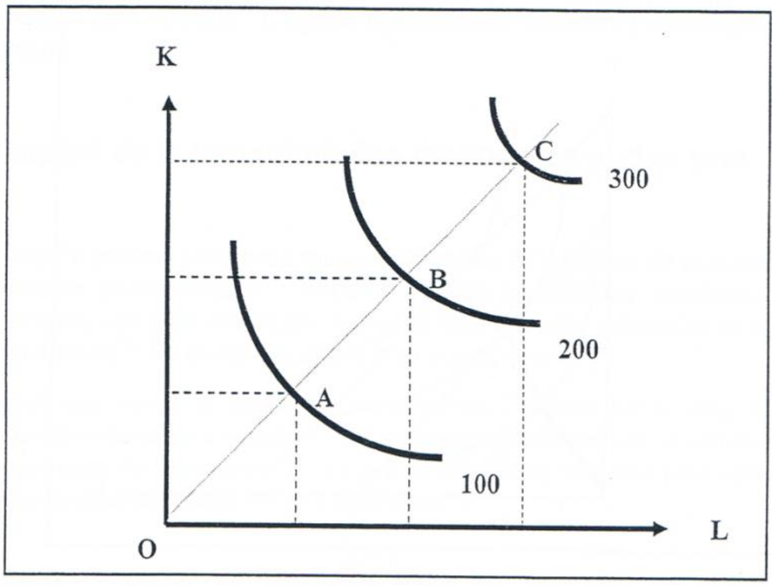


b) Sentier d'expansion et rendements d'échelle

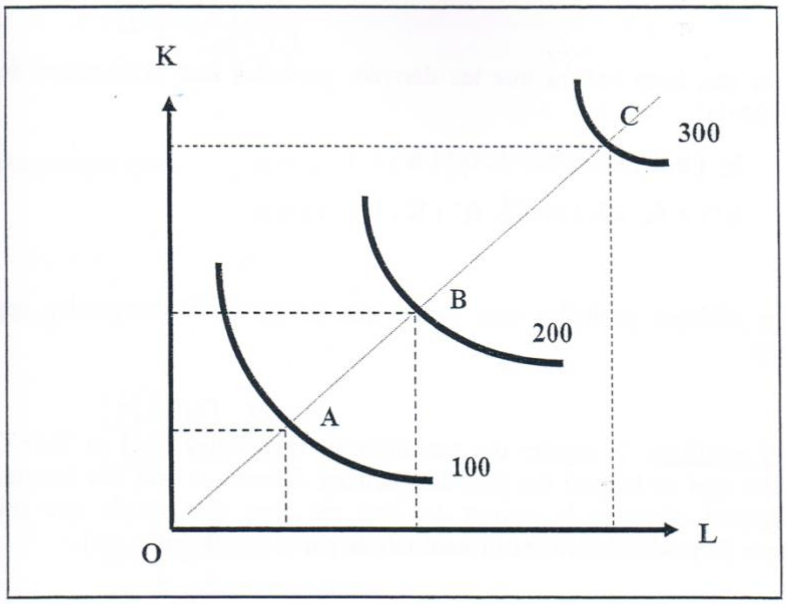
Il est possible de matérialiser la nature des rendements d'échelle sur la carte des iso-coûts. Les rendements d'échelle sont de trois types : croissant, constant et décroissant. A chaque rendement d'échelle, on a :

- Rendements d'échelle constants → ici [OA] = [AB] = [BC]
- Rendements d'échelle décroissants → la quantité produite augmente moins vite proportionnellement que la quantité de facteur.
- Rendements d'échelle croissants → la production double alors que les facteurs font moins que doubler.

Sentier d'expansion : cas des rendements constants



Sentier d'expansion : cas des rendements décroissants



Remarque : L'usage de la notion de sentier d'expansion prend tout son sens sur la longue période. Le sentier d'expansion est une droite lorsque la fonction de production est homogène.

Fonction Cobb Douglas :

$$TMST = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).\left[\frac{K}{L}\right]$$

Admettons que : $\alpha = \frac{1}{4} \qquad \beta = \frac{3}{4}$

$p = 15 \qquad q = 30$

$$\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}\right).\left[\frac{K}{L}\right] = \frac{15}{30} \Leftrightarrow 3.\frac{K}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{6}.L$$

<u>Remarque :</u> Lorsque les facteurs de production sont complémentaires, le sentier d'expansion est toujours une droite.

2) Variation du prix des facteurs

Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement à la l'influence d'un changement de prix des facteurs à budget constant. On étudie cette situation à l'aide des effets de revenu et de substitution, exactement comme pour le consommateur.

3) Elasticité de substitution

Est-il possible de mesurer l'impact sur la combinaison productive d'une modification du prix relatif des facteurs ?

Le TMST en A n'est pas égal au TMST en B.

Nous avons besoin de deux éléments : l'appréciation de la combinaison productive grâce à un ratio $\frac{K}{L}$, et l'appréciation de prix relatifs grâce à un ratio $\frac{p}{q}$.

Une élasticité est un chiffre qui donne une bonne idée de l'influence d'une variation sur une autre. Si $\frac{p}{q}$ varie, comment varie $\frac{K}{L}$?

A partir de ces deux éléments, nous allons définir une nouvelle élasticité qui s'appelle l'élasticité de production :

$$e_s = \frac{\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\frac{d\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{p}{q}}} = \frac{\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\frac{d(TMS)}{TMS}} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d(TMS)} \times \frac{TMS}{\frac{K}{L}}$$

Cette élasticité mesure la sensibilité de la structure technique à toute modification dans la structure des coûts relatifs. Elle traduit la possibilité laissée au producteur de modifier sa combinaison productive lorsque le prix des facteurs varie. A titre d'application, calculons cette élasticité à la fonction de Cobb-Douglas.

$$Q = A.K^{\alpha}.L^{\beta}$$

$$TMS = \frac{\beta}{\alpha}.\frac{K}{L}$$

$$\frac{d(TMS)}{d\left(\frac{K}{L}\right)} = \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d(TMS)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{TMS}{\frac{K}{L}} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}.\frac{K}{L}}{\frac{K}{L}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Donc $e_s = 1$