UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE - UFR de GESTION

TD-4
Les matrices
Licence 1ère année

Exercice 1:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$ c'est de rang 1 bien sûr.

ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 18 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c'est de rang au plus 2 et $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$ donc la matrice est de rang 2.

iii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ le déterminant vaut $12 - 12 = 0$ donc c'est de rang au plus 1. Or par exemple $4 \neq 0$ donc c'est de rang 1.

iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -6 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ c'est de rang au plus 2 et $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$ donc la matrice est de rang 2.

Exercice 2:

Soit $f(x, y, z) = (x + y, 2z, y + z)$

$A = \begin{pmatrix} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{pmatrix}$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $g(x, y) = (x + y, x - y, 2y)$.

$B = \begin{pmatrix} g(1,0) & g(0,1) \end{pmatrix}$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Direct:
$f(1,2,1) = (3,2,3)$ et $g(1,1) = (2,0,2)$
Matriciel:

$$f(1,2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$g(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice représentative de l'application $f \circ g$ est tout simplement $A.B$.

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Direct:
$g(1,2) = (3, -1, 4)$ donc $f \circ g(1,2) = f(3, -1, 4) = (2, 8, 3)$.
Matriciel:

$$f \circ g(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ Ok!}$$

Exercice 3:

Pour chaque matrice:
a) Calculer A^2, A^3 et $f(A)$.
b) Montrer que A est un zéro du polynôme g.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 76 & 84 \\ 140 & 132 \end{pmatrix} \\ & A^2 & A^3 \end{array}$$

$f(A) = 2\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 12 \\ 20 & 39 \end{pmatrix}$

$g(A) = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix} \\ & B^2 & B^3 \end{array}.$$

$f(B) = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$.

$g(B) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4:

i) Soit B une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ supposons qu'elle commute avec A alors:

$$A.B = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } B.A = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}$$

En égalisant terme à terme on obtient: $\begin{cases} a+c=a \\ c=c \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=a \end{cases}$

Donc les matrices qui commutent avec A sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

ii)

$n=1 : A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok

$$n \rightsquigarrow n+1 : A^{n+1} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{CQFD!!!}$$

donc $\forall n \in N^*, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5:

i) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha - 2.$

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$

iii) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 29 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 + 1 = -8.$

Exercice 6:

$i)\ A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (en retirant la 1ere ligne a chaque autre)

$= 1$ pour tout $n \in N$.

$ii)$ Calculons les 1ers termes:

$B_1 = |2| = 2$ et $B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$

$B_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 1 = 4.$

Il semble donc que $B_n = n + 1$, montrons le par récurrence...

$n = 1 : OK$ c.f. précédemment.

$n \rightsquigarrow n + 1 : B_{n+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(en retirant la 2nde ligne à la première)

$B_{n+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = B_n + A_n = n + 1 + 1 = n + 2.$

CQFD

$iii)\ C_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!$

(on a retiré la 1ère ligne a chacune des autres. Comme il reste une matrice diagonale supérieure, son déterminant est égal au produit des valeurs de la diagonale. CQFD. On pourrait remarquer que cette opération n'était pas possible pour C_1 mais la formule fonctionne encore...).

$iv)$ Calculons les 1ers termes:

$D_1 = |2| = 2$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$

$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4.$

Il semble donc que $D_n = n + 1$, montrons-le par récurrence...

$n = 1, 2 : OK$ c.f. précédemment (remarque il faut les deux rangs initiaux c.f. suite).

$n - 1, n \rightsquigarrow n + 1 : D_{n+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(on développe par rapport à la 1ère colonne)

$$D_{n+1} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_n - D_{n-1}.$$

Donc par hypothèse de récurrence $D_{n+1} = 2\,(n+1) - n = n+2$.

CQFD!!!

Finalement $\forall n \in N^* : D_n = n+1$.

Exercice 7:

Déterminer le rang des matrices suivantes:

$i)$ Commencons par calculer le déterminant:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 - 2 = 2 \neq 0$. Donc la matrice est de rang 3.

$ii)$ Commencons par calculer le déterminant:

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \text{-1} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & \text{-1} \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \text{-1} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 16 - 8 = 0$ donc la matrice est de rang au plus 2. Il faut donc regarder les sous matrices 2*2.

Premier essai: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ on ne peut rien dire de plus tant que l'on a pas testé tous les déterminants de matrice extraite 2*2.

Autre essai $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ donc la matrice est de rang au moins 2.

Finalement la matrice est de rang 2.

$iii)$ $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ cette matrice est rectangulaire elle est de rang au plus 2.

Testons une sous matrice 2*2:

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$ on ne peut rien dire

Autre test: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 \neq 0$ donc la matrice est de rang au moins 2.

Finalement la matrice est de rang 2.

$iv)$ $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 2 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ cette matrice est au plus de rang 2.

Testons les sous matrices 2*2:

$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - \alpha = \alpha$ donc si $\alpha \neq 0$ la matrice est de rang 2.

Sinon directement $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que quelque soit la matrice 2*2 extraite son déterminant est nul. Donc elle est au plus de rang 1 comme le terme en haut à droite est non nul, elle est de rang 1.

Conclusion si $\alpha \neq 0$ rang=2 sinon rang=1.

$v)$ $\begin{pmatrix} \alpha - 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha - 1 & 3 \\ 3 & 2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$

Commencons par calculer le déterminant...

$\begin{vmatrix} \alpha-1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha-1 & 3 \\ 3 & 2 & \alpha-1 \end{vmatrix}$ on peut remarquer que la somme des colonnes pour chaque ligne donne le même résultat à savoir $\alpha+4$.

On peut donc sommer la colonne 2 et 3 à la colonne 1. (P.S. comme les étudiants risquent d'avoir du mal à comprendre quelles sont les opérations autorisées, vous pouvez le faire en deux étapes: d'abord sommer la colonne 2 puis sommer la colonne 3 à la colonne 1).

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha-1 & 3 \\ 3 & 2 & \alpha-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+4 & 2 & 3 \\ \alpha+4 & \alpha-1 & 3 \\ \alpha+4 & 2 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha-1 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha-1 \end{vmatrix}$$

On peut alors retirer la 1ère ligne aux deux autres.

$$= (\alpha+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-4 \end{vmatrix} = (\alpha+4)\begin{vmatrix} \alpha-3 & 0 \\ 0 & \alpha-4 \end{vmatrix} = (\alpha+4)\,.\,(\alpha-3)\,.\,(\alpha-4)$$

Donc si $\alpha \notin \{-4, 3, 4\}$ le déterminant est non nul et la matrice est de rang 3.

Sinon la matrice est de rang au plus 2 puisque son déterminant est nul.

Cas $\alpha = -4$: $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ le premier sous déterminant 2*2 donne $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 25-4 = 21 \neq 0$ donc la matrice est de rang 2.

Cas $\alpha = 3$: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ le sous déterminant 2*2 (2dernières lignes 2 premières colonnes) donne$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0$ donc la matrice est de rang 2.

Cas $\alpha = 4$: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ le premier sous déterminant 2*2 donne$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9-4 = 5 \neq 0$ donc la matrice est de rang 2.

Conclusion

si $\alpha \notin \{-4, 3, 4\}$ le rang vaut 3 sinon le rang vaut 2.