

## TD de Microéconomie n°2 :

### Définitions :

#### Expression mathématique de l'utilité totale et marginale :

Elles font appel aux fonctions de plusieurs variables.

$$U_t = f(x, y) \quad \text{x et y sont les quantités respectives de X et Y}$$

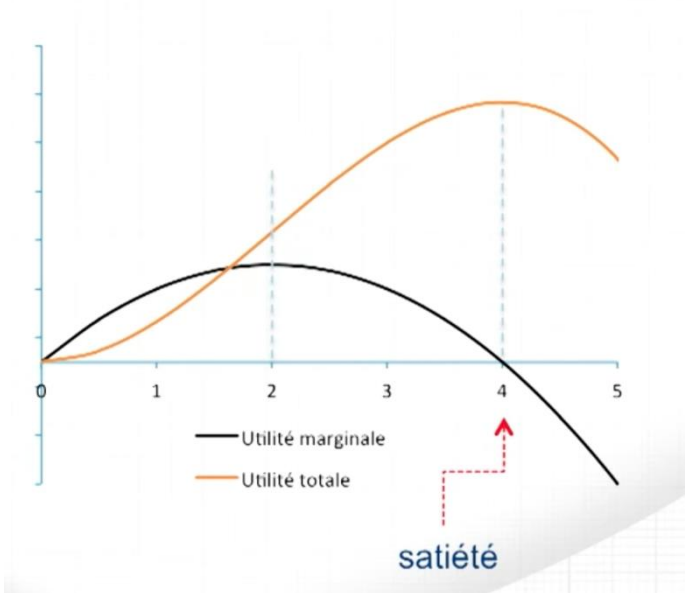
Utilité totale : utilité que l'on a à consommer un bien, ou deux, ou trois

$$U_m^x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{Utilité marginale : correspond à la dernière utilité ressentie lorsque l'on consomme un bien supplémentaire}$$

Pour dériver une fonction de plusieurs variables par rapport à une variable, on considère que toutes les autres sont stables.

#### Point de satiété (de saturation) :

### Utilités totale et marginale



Ut à son maximum  
Um est nulle

En partant de 0 pour aller jusqu'à 2, on constate que l'utilité totale est croissante à taux croissant.

Donc le point 2 est le point d'inflexion.

De 2 à 4, elle est croissante à taux décroissant jusqu'à son maximum 4 où elle commence à décroître.

Le coefficient directeur de la tangente en un point est le nombre dérivé en ce point de la courbe, soit l'utilité marginale (courbe noire).

Dans toute la partie où l'utilité totale croît à taux croissant, l'utilité marginale augmente et dans la partie où l'utilité totale croît à taux décroissant, l'utilité marginale décroît de 2 à 4.

#### Paradoxe de l'eau et du diamant (qu'est-ce qui fonde la valeur d'un bien ?) :

Question posée par beaucoup d'économistes, très intéressante car avant on pensait que la valeur d'un bien se mesurait par rapport à la quantité de rapport incorporée pour obtenir ce bien : la valeur travail.

On regarde ce qu'il se passe pour l'eau et le diamant.

L'eau a une forte valeur d'usage (elle est très utile), pourtant elle ne vaut presque rien.

Le diamant, pourtant inutile, a une très forte valeur d'échange (il vaut cher).

Donc les prix de ces deux biens est très paradoxal. Les premières explications se sont référées à la valeur travail car il est très difficile à extraire le diamant. Quand l'on a commencé à réfléchir en termes d'utilité marginale, on voit la différence. Trop de verres d'eau mène au dégoût. Tandis que plus on nous donne de diamants, plus on est content. L'Um de l'eau décroît très vite alors que l'Um du diamant décroît très lentement. C'est donc de l'utilité marginale essentiellement que provient la valeur des biens. La rareté est un des déterminants essentiels de la valeur d'un bien.

Le luxe c'est rare mais ce sont aussi des biens qui ont comme caractéristique une forte main d'œuvre et qui demandent beaucoup de travail de qualité. Il faut donc prendre en compte les deux théories.

## Lois de Gossen :

Ce sont le reflet littéraire du lagrangien.

**1<sup>ère</sup> loi :** décroissance de l'utilité marginale (dès le départ ou à partir d'un certain niveau de consommation)  
→ Elle n'est pas toujours décroissante mais à un moment donné, elle finira par décroître.

**2<sup>ème</sup> loi :** à l'équilibre, il y a une égalité des utilités marginales pondérées par les prix ou rapport des utilités marginales égales au rapport des prix

→ Le consommateur est rationnel, donc il ne fait pas n'importe quoi, il regarde quel est son intérêt à dépenser 1€ dans un bien plutôt que dans un autre.

## Hypothèse de non-saturation :

Une quantité supplémentaire (additionnelle) procure toujours au consommateur une satisfaction supplémentaire quel que soit la quantité déjà détenue de ce bien, on ne se lasse pas.

A un moment donné, il est possible de sentir de la saturation sur un bien, donc on indique que l'hypothèse de non-saturation pouvait être au sens fort ou au sens faible.

**Au sens fort :** une quantité supplémentaire d'un bien procure toujours au consommateur une satisfaction supplémentaire

→ Dans notre société, les besoins sont illimités, donc cette définition peut être facilement comprise.

**Au sens faible :** la saturation est possible à l'égard d'un ou plusieurs biens (dont on détient déjà un certain stock), la non-saturation existant à l'égard des autres biens

→ Cette non-saturation peut être exprimée vis-à-vis de biens nouveaux.

**Droite de budget :** soit le coefficient directeur :  $P_x/P_y$  et l'ordonnée à l'origine :  $B_0/P_y$

Elle matérialise toutes les combinaisons possibles pour un consommateur qui désire dépenser la totalité de son revenu dans l'achat des biens X et Y respectivement aux prix  $P_x$  et  $P_y$ .

C'est un concept relativement simple mais très important pour comprendre l'équilibre du consommateur.

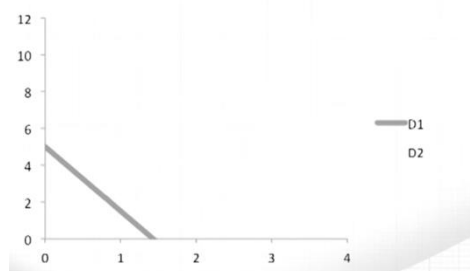
Elle matérialise le fait de dépenser en l'achat de biens X ou de biens Y, on dépense tout notre revenu.

$$B = x \cdot P_x + y \cdot P_y$$

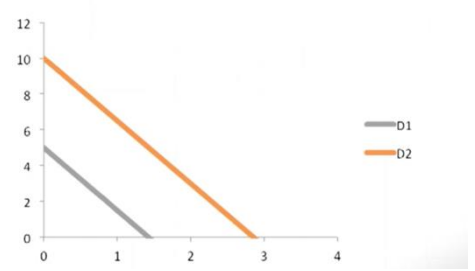
Pour un budget  $B_0$  donné

$$y = (B_0 / P_y) - (P_x / P_y) \cdot x$$

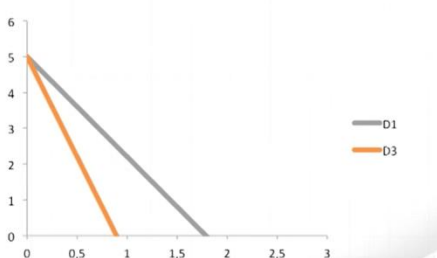
Pour un budget  $B_0$  de 10 €  
 $y = (10 / 2) - (7 / 2) \cdot x$



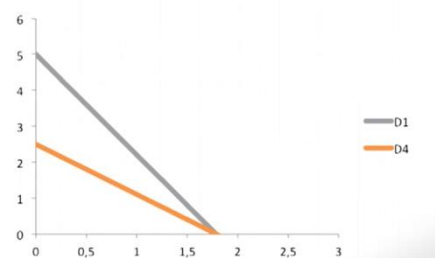
Si  $B_0$  double (20 €), toutes choses égales par ailleurs



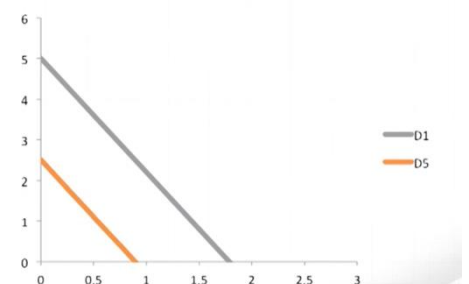
Si  $P_x$  double (14 €), toutes choses égales par ailleurs



Si  $P_y$  double (4 €), toutes choses égales par ailleurs



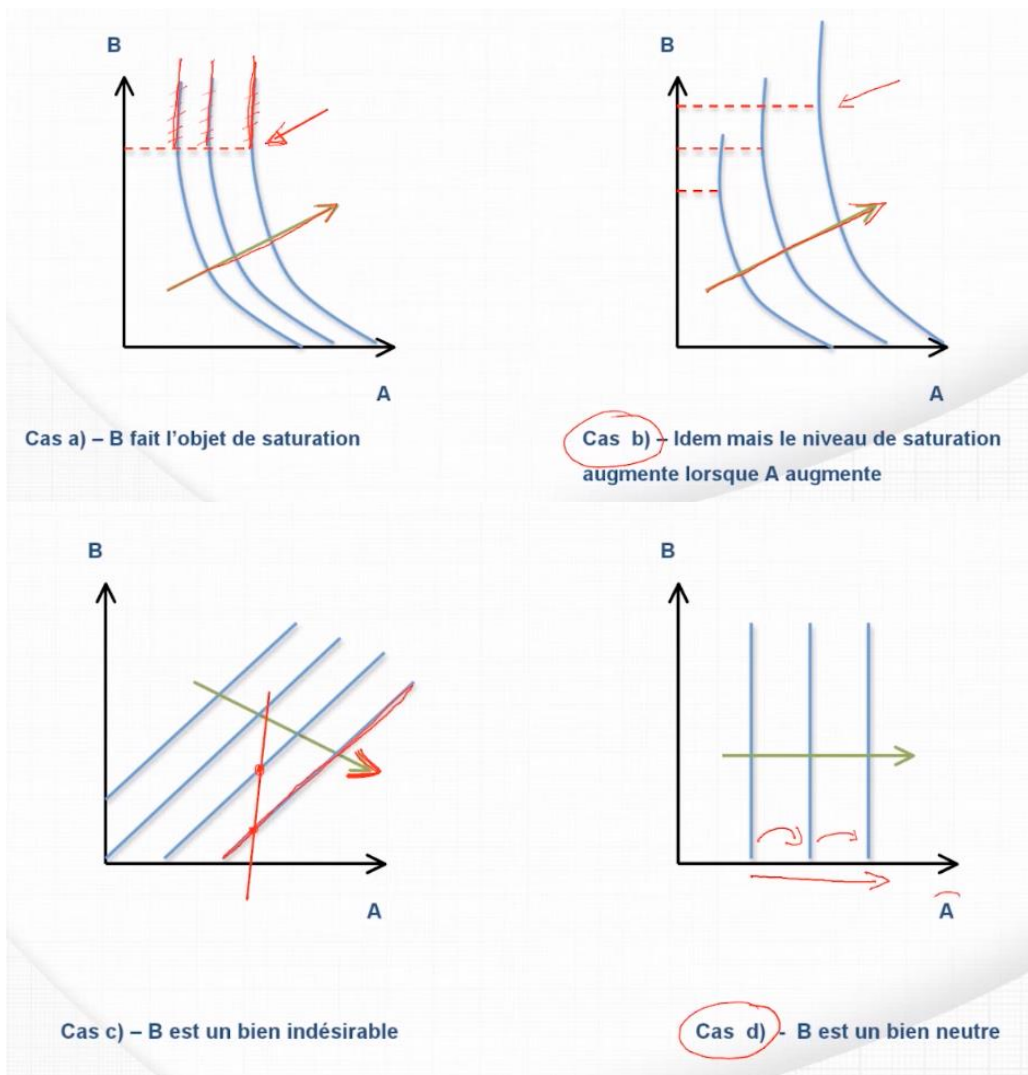
Si  $P_x$  et  $P_y$  doublent, toutes choses égales par ailleurs :



## Questions :

### 1/ Les cartes d'indifférence

- Saturation indiquée par les pointillés rouges. On a toujours le même niveau de saturation même lorsque l'on consomme d'avantages de A.
- A peu près la même chose alors que le niveau de saturation de B augmente au fur et à mesure qu'il est combiné avec plus de A. Les courbes d'indifférence se déplacent vers le nord-est, le consommateur va saturer moins vite sur le bien B.
- Il y a des courbes d'indifférences croissantes avec une évolution vers le bas du graphique et vers la droite.
- Le fait que ce soit un bien neutre signifie que le consommateur ne s'en préoccupe pas.



Pour c) : la satisfaction du consommateur s'accroît quand on se déplace vers le bas et vers la droite, c'est-à-dire quand on consomme moins de B et plus de A.

Il existe cependant des possibilités de substitution : le consommateur peut accepter quelques biens B en plus si il reçoit aussi quelques biens A ... C'est pourquoi les courbes d'indifférence sont croissantes.

Pour d) : un bien est appelé « neutre » lorsque le consommateur ne s'en préoccupe pas. Ainsi, augmenter la quantité de biens B n'affecte pas la satisfaction du consommateur. Les courbes d'indifférence doivent donc être des droites verticales. L'augmentation de la satisfaction ne peut provenir que de la hausse de la consommation de A.

2/ TMS : formulation mathématique et signification concrète

Soit une courbe d'indifférence notée C ayant pour équation :  $y = f(x) = 10 / x$

Soit une droite D1, tangente à C au point Z(2, 5), dont on déterminera l'équation.

Soit une droite D2 d'équation  $y = 12 - 2,5x$  qui coupe C en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées. Le point A sera à gauche de B sur le graphique.

Déterminer le taux moyen de substitution entre A et B.

Déterminer le taux marginal de substitution en Z. Que remarquez-vous ? Expliquer.

La droite D1 tangente à C au point Z(2, 5)

- possède un coefficient directeur « a » qui est égal au nombre dérivé de la courbe C en  $x = 2$
- passe par Z et par conséquent vérifie  $5 = 2a + b$

Donc :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\frac{10}{x^2}$$

$$y = ax + b$$

Pour  $x = 2$  :  $a = -5/2$

Il vient facilement :  $b = 10$

Equation de la droite D1 :

$$y = 10 - \frac{5}{2}x$$

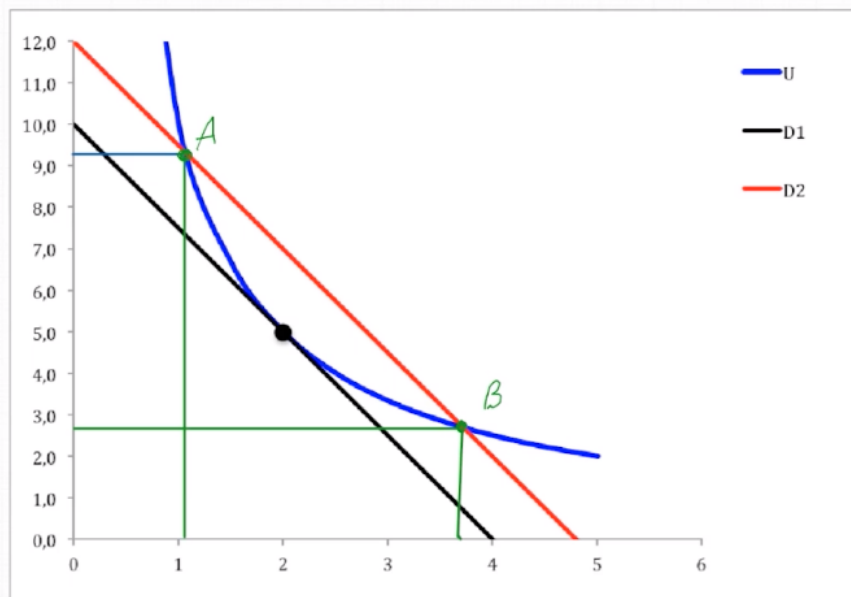
Pour trouver les points d'intersection A et B entre D2 et la courbe C, il faut résoudre :

$$12 - \frac{5}{2}x = -\frac{10}{x^2}$$

A l'aide du discriminant, on trouve :

$$x_1 \approx 1,07 \quad \text{et} \quad x_2 \approx 3,73$$

$$f(x_1) \approx 9,35 \quad \text{et} \quad f(x_2) \approx 2,68$$



Taux moyen de substitution :

$$TMS_{Y/X} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2,68 - 9,35}{3,73 - 1,07} = -\frac{-6,67}{2,66} = 2,50$$

Le TMS du bien Y au bien X mesure la quantité de bien Y à laquelle le consommateur est prêt à renoncer pour obtenir 1 unité additionnelle de bien X. Ainsi, en partant de A, pour gagner une unité en plus de bien X, le consommateur se prive de 2,50 unités de Y. Toujours en conservant sa satisfaction constante.

Ainsi, le TMS correspond à la pente de la corde AB (au signe près) puisque par convention, le TMS est toujours positif.

La pente de AB peut aussi se calculer encore plus simplement en faisant :  $12 / 4,8 = 2,5$

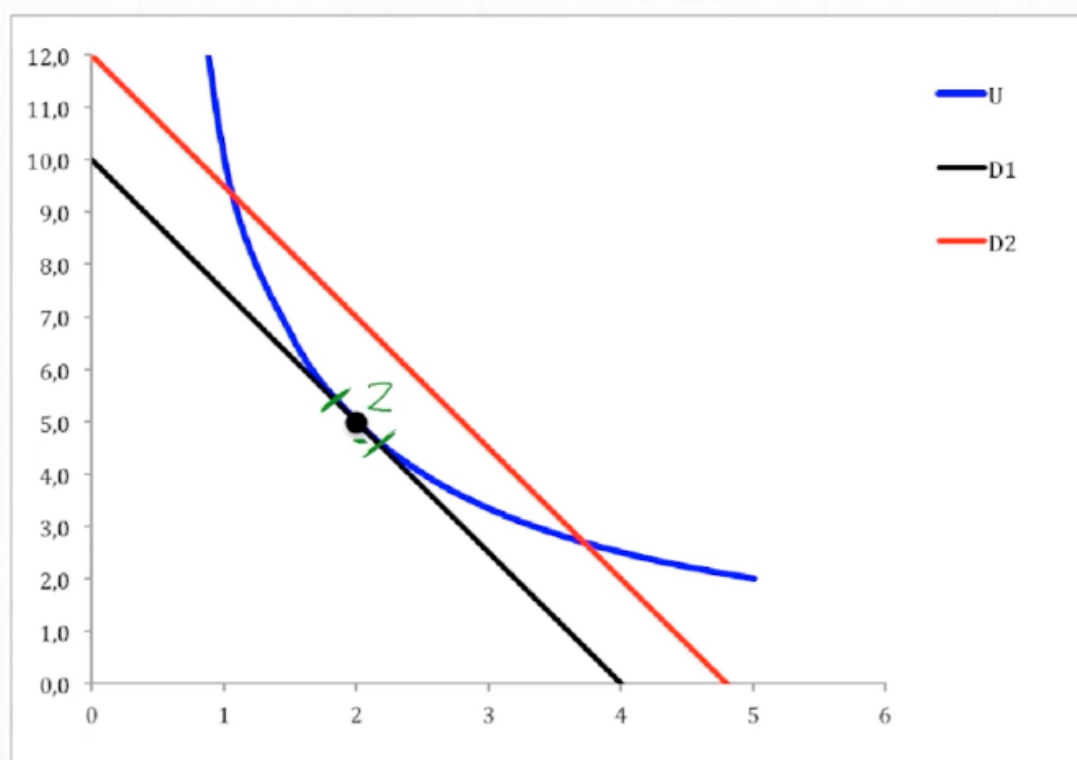
Taux marginal de substitution :

$$TMS_{Y/X} = -\frac{dy}{dx} = +2,50$$

Le TMS du bien Y au bien X mesure la quantité de bien Y à laquelle le consommateur est prêt à renoncer pour obtenir une unité additionnelle de bien X. Ainsi, en partant de Z, pour gagner 0,1 unité additionnelle de bien X, le consommateur doit se priver de 0,25 unités de Y. Toujours en conservant sa satisfaction constante.

Ainsi, le TMS correspond à la pente de la droite D1 (au signe près) puisque par convention, le TMS est toujours positif.

Remarque : TMS et TMS sont égaux



## Exercices :

### Exercice 1 :

#### Optimum du consommateur et TMS

Claire possède la fonction d'utilité suivante :  $U(x,y) = 4 + y \cdot x^2$

où  $x$  et  $y$  correspondent respectivement aux quantités de biens X et Y.

Initialement, le prix du bien X est de  $p$  euros et le prix du bien Y est de 4 euros.

De plus, nous savons que Claire dispose d'un revenu de  $R$  €.

#### Partie A

1 - Etablir l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donné  $U_0$ .

Par la méthode du lagrangien, déterminer :

2 - le lagrangien et les conditions du 1<sup>er</sup> ordre,

3 - l'équation du chemin d'expansion du revenu,

4 - les coordonnées des points optimaux.

5 - Lorsque  $R = 24$  € et  $p = 2$  €, calculer l'utilité totale associée au point optimal (noté A), puis en déduire l'équation de la courbe d'indifférence associée (notée  $U_1$ ).

6 - Déterminer l'équation de la droite de budget (notée  $D_1$ ) tangente en A à  $U_1$ .

7 - Calculer à l'aide de deux méthodes le TMS en A. Raisonnant à partir de l'optimum, si Claire souhaitait réduire sa consommation de biens X de 0,5 unité, de combien devrait-elle faire varier sa consommation de biens Y pour maintenir le même niveau d'utilité ?

7 bis - A l'aide du multiplicateur de Lagrange, donner une approximation du supplément d'utilité qu'une hausse du revenu de 1 € permettrait d'obtenir.

La fonction d'utilité de Claire est la suivante :  $U(x, y) = x^2 y + 4$

#### 1 - Equation des courbes d'indifférence

$$y = \frac{U_0 - 4}{x^2}$$

comme  $x > 0$  et  $y \geq 0$  alors  $U(x, y) \geq 4$

#### 2 - Le lagrangien et les conditions du 1<sup>er</sup> ordre

$$\text{Max } U(x, y) = x^2 y + 4$$

$$\text{s.c. } R = px + 4y$$

$$\underline{\text{Lag}}(x, y, \lambda) = x^2 y + 4 + \lambda \cdot (R - px - 4y)$$

Les conditions du 1<sup>er</sup> ordre sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{Lag}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \text{Lag}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \text{Lag}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - p\lambda = 0 \\ x^2 - 4\lambda = 0 \\ R - px - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{p}xy \\ \lambda = \frac{1}{4}x^2 \\ px + 4y = R \end{cases}$$

### 3 – Chemin d'expansion du revenu

Des équations (1) et (2), il vient :

$$y = \frac{p}{8}x$$

### 4 – Les coordonnées des points optimaux

Grâce à cette relation et par substitution dans l'équation (3), on obtient les:

$$x^* = \frac{2R}{3p} \quad ; \quad y^* = R/12$$

### 5 – Illustration avec $R = 24 \text{ €}$ et $p = 2 \text{ €}$

L'optimum, noté A, a pour coordonnées :  $x^* = 8$  et  $y^* = 2$

L'utilité associée à cet optimum est donc :  $U(8, 2) = 132$

Equation de la courbe d'indifférence initiale (notée U1) :

$$y = \frac{128}{x^2}$$

$$U = x^2y + 4$$

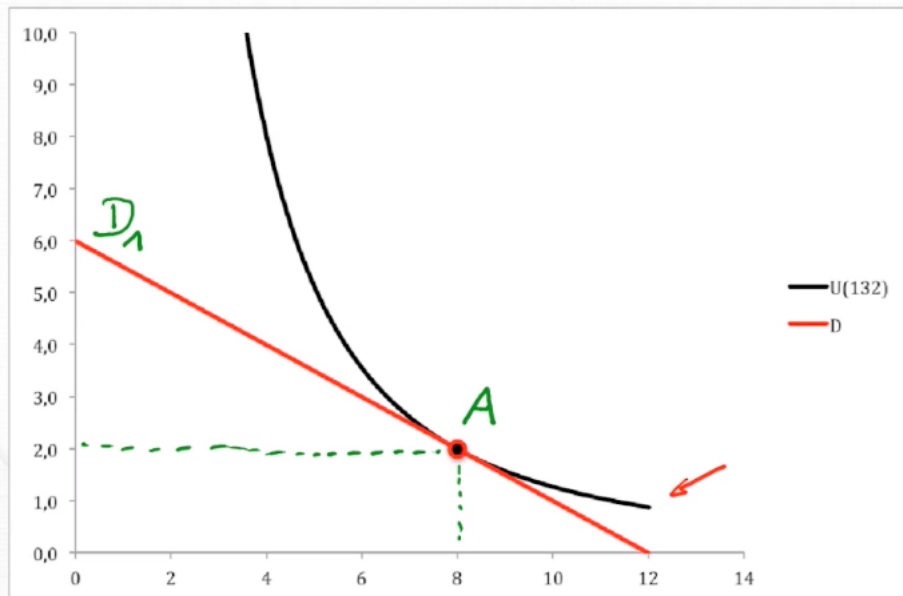
$$y = \frac{U_0 - 4}{x^2}$$

### 6 - Equation de la droite de budget (notée D1), tangente à la courbe U1

$$y = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$R = px + 4y$$

Remarque : il suffit simplement de partir de la contrainte :  $24 = 2x + 4y$



## 7 – TMS

A l'optimum, le TMS peut facilement s'obtenir en faisant le rapport des prix des biens. De manière générale, le TMS est le rapport des utilités marginales, donc :

$$) \quad TMS = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$) \quad TMS = \frac{U_m^X}{U_m^Y} = \frac{2xy}{x^2} = \frac{2 * 8 * 2}{8^2} = 0,5$$

A partir de l'optimum, si Claire réduit sa consommation de biens X de 0,5 unité, alors elle devra augmenter sa consommation de bien Y de  $TMS \times 0,5 = 0,25$  unité (à niveau d'utilité constant).

## 7 bis - Interprétation du multiplicateur de Lagrange

Dans le cours, il a été démontré à l'optimum que :

$$dU = \lambda dR$$

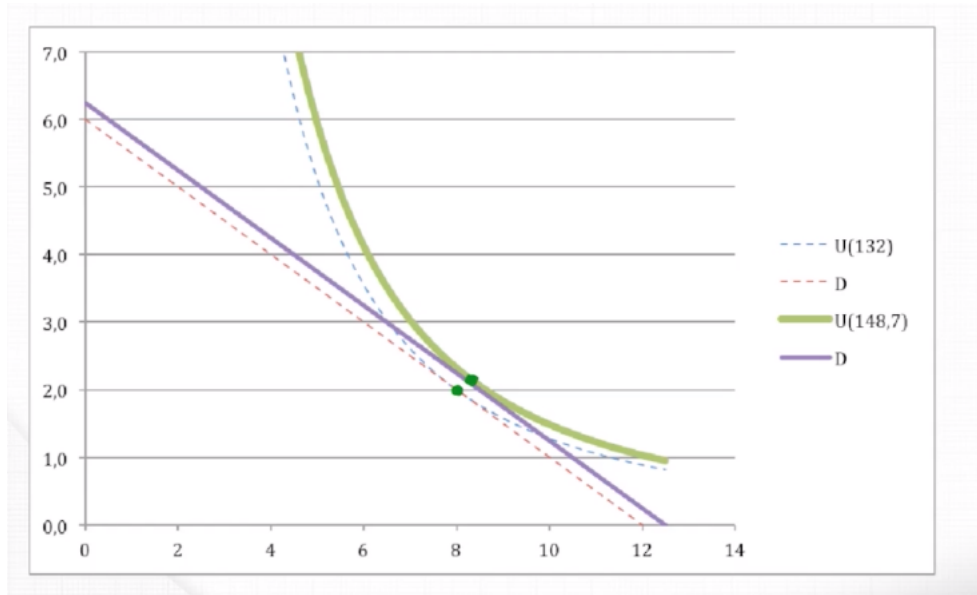
$$16 = 16 * 1$$

Ainsi, le supplément d'utilité procuré par 1 € de revenu en plus est d'environ 16, portant l'utilité à 148.

La valeur exacte aurait pu être trouvée en repassant par le lagrangien et les valeurs optimales :

$$x^* = 8,333 \quad y^* = 2,083 \quad U = 148,7$$





## Exercice 2 :

### 1/ Allure des courbes d'indifférence

Notons  $U_0$  un niveau donné d'utilité.

Les courbes d'indifférence s'écrivent donc :

$$U_0 = 3x + xy \Leftrightarrow y = \frac{U_0}{x} - 3$$

avec  $x > 0$

L'étude succincte de cette fonction montre qu'il s'agit de branches d'hyperbole, ayant pour asymptote horizontale la droite  $y = -3$

Comme il s'agit d'une fonction d'utilité, on ne retiendra que les valeurs positives de  $x$  et de  $y$ .

Ainsi on doit avoir :

$$y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{U_0}{x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{U_0}{3}$$

Donc :

$$0 < x \leq \frac{U_0}{3}$$

## 2/ Calcul du TMS de 2 façons

Rappel :  $TMS = \frac{U_m^X}{U_m^Y} = - \frac{dy}{dx}$

### 1<sup>ère</sup> méthode

$$TMS_{(x,y)} = \frac{U_m^X}{U_m^Y} = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}} = \frac{3+y}{x}$$

### 2<sup>ème</sup> méthode

$$TMS_{(x,y)} = - \frac{dy}{dx} = - \left( - \frac{U_0}{x^2} \right) = \frac{3x + xy}{x^2} = \frac{3+y}{x}$$

## 3/ Equation du sentier d'expansion (2 méthodes)

### 1<sup>ère</sup> méthode

Le sentier d'expansion est constitué de l'ensemble des optimums, c'est-à-dire des points où la droite de budget est tangente à la courbe d'indifférence. Donc, en ce point, le nombre dérivé de la courbe d'indifférence est égal au coefficient directeur de la droite de budget.

Equation des courbes d'indifférence

$$y = \frac{U_0}{x} - 3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{U_0}{x^2}$$

Equation des droites de budget

$$y = \frac{B_0}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{U_0}{x^2} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{3+y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

Sentier d'expansion :  $y = \frac{p_x}{p_y} x - 3$

## 2<sup>ème</sup> méthode

Il faut résoudre le programme suivant :

$$\text{Max } U(x, y) = 3x + xy$$

$$\text{SC } B = xp_x + yp_y$$

On écrit le lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3x + xy + \lambda \cdot (xp_x + yp_y - B)$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3x + xy + \lambda \cdot (xp_x + yp_y - B)$$

On pose ensuite les conditions du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + y + \lambda p_x = 0 & \rightarrow (1) \\ x + \lambda p_y = 0 & \rightarrow (2) \\ xp_x + yp_y - B = 0 & \rightarrow (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + y + \lambda p_x = 0 & \rightarrow (1) \\ x + \lambda p_y = 0 & \rightarrow (2) \\ xp_x + yp_y - B = 0 & \rightarrow (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3+y}{p_x} \quad \text{et} \quad (2) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{x}{p_y}$$

donc :

$$-\frac{3+y}{p_x} = -\frac{x}{p_y} \Leftrightarrow y = \frac{p_x}{p_y}x - 3$$

Nous venons de trouver l'équation du sentier d'expansion à l'aide du lagrangien. Ce dernier nous permet ensuite, grâce à l'équation (3) de trouver les coordonnées des points optimaux. Il suffit de remplacer  $y$  par sa valeur dans l'équation (3).

$$(3) \Leftrightarrow xp_x + yp_y - B = 0$$

$$\Leftrightarrow xp_x + \left(\frac{p_x}{p_y}x - 3\right) \cdot p_y - B = 0$$

$$\rightarrow x^* = \frac{3p_y + B}{2p_x}$$

$$y = \frac{p_x}{p_y}x - 3 \rightarrow y^* = \frac{p_x}{p_y} \left( \frac{3p_y + B}{2p_x} \right) - 3$$

$$y^* = \frac{B - 3p_y}{2p_y}$$

$x^*$  et  $y^*$  sont appelées **demandes marshaliennes** de X et Y

Ces demandes ne peuvent prendre que des valeurs positives puisqu'il s'agit de quantités de biens. Ainsi, par exemple, pour que  $y^*$  soit positif, il faut que :

$$B - 3p_y \geq 0 \Leftrightarrow B \geq 3p_y$$

Ces conditions sont liées à la forme particulière des courbes d'indifférence, qui coupent l'axe des abscisses.

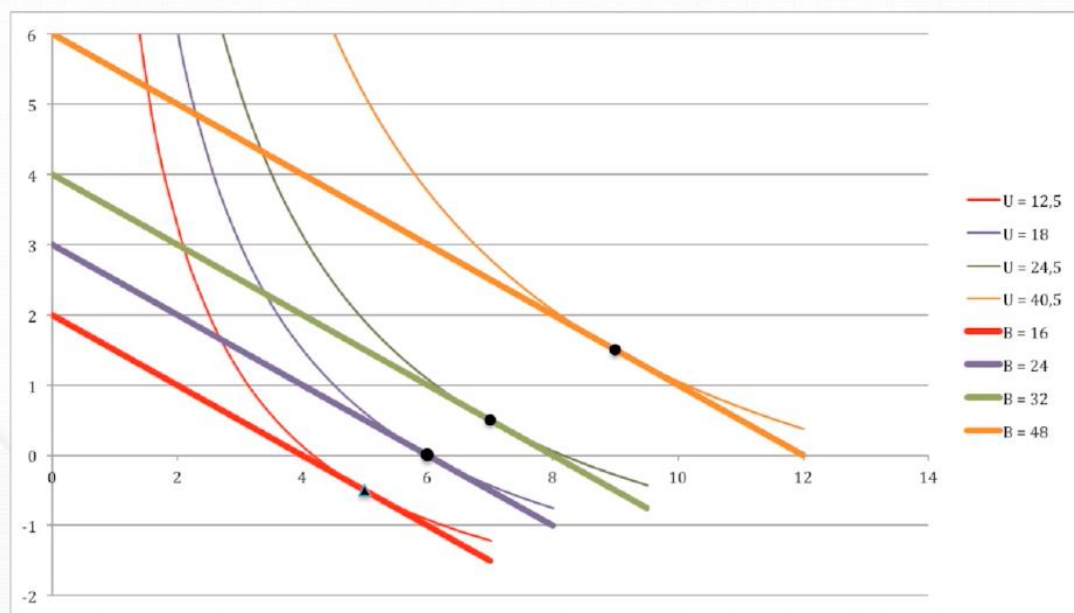
#### 4/ Illustrations avec $p_x = 4$ et $p_y = 8$

L'équation du sentier d'expansion est :

$$y = \frac{p_x}{p_y} x - 3 \rightarrow y = \frac{1}{2} x - 3$$

Le sentier est positif pour tout  $x \geq 6$

Budgets	B = 16	B = 24	B = 32	B = 48
Droite de budget	$y = 2 - \frac{1}{2}x$	$y = 3 - \frac{1}{2}x$	$y = 4 - \frac{1}{2}x$	$y = 6 - \frac{1}{2}x$
Optimums	$x = 5$ $y = -\frac{1}{2}$	$x = 6$ $y = 0$	$x = 7$ $y = \frac{1}{2}$	$x = 9$ $y = \frac{3}{2}$
Niveau d'utilité	12,5	18	24,5	40,5
Equation des courbes d'indifférence	$y = \frac{12,5}{x} - 3$	$y = \frac{18}{x} - 3$	$y = \frac{24,5}{x} - 3$	$y = \frac{40,5}{x} - 3$
Conditions :				
- sur x :	$U / 3 = 4,16$	$U / 3 = 6$	$U / 3 = 8,16$	$U / 3 = 13,5$
$0 < x \leq U/3$	Non respectée	respectée	respectée	respectée
- sur le budget :				
$B \geq 3 \cdot p_y = 24$	Non respectée	respectée	respectée	respectée



Revenons sur le cas où  $B = 16$ , lorsque les prix sont de 4 et 8 pour X et Y

Les conditions sur X et sur B ne permettent pas d'atteindre un optimum.

On calcule facilement que la droite de budget coupe l'axe en  $x = 4$  ;  $y = 0$

Avec un budget de 16, la seule solution pour le consommateur consiste à réduire légèrement son utilité de telle façon à ce que la courbe d'indifférence passe par  $x = 4$  ;  $y = 0$

Niveau d'utilité :  $U = (3 \times 4) + (4 \times 0) = 12$

Equation de la courbe d'indifférence :  $y = (12 / x) - 3$

Ainsi, il y aura bien intersection entre la courbe d'indifférence et la droite de budget (mais il n'y aura pas tangence).

Il s'agit d'une solution en coin.

Traçons sur le graphique suivant la courbe d'indifférence pour  $u = 12$

