UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE - UFR de GESTION

TD-5
Inversion de matrice
Licence 1ère année

# Exercice 1:

(i) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$

Donc $M_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Pour la suite je vous donne uniquement les résultats, je vous conseille d'expliquer aussi la vérification facile ex post par le produit.

(ii) $M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

(iii) $M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & 5/2 & -13/2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

# Exercice 2:

Dans cet exercice, on utilise donc le fait que $M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t Co\,(M)$.

(i) $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\det M_1 = 4 - 2 = 2$.

$\mathrm{Co}(M_1) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ne pas oublier les cosignes)

${}^t\mathrm{Co}(M_1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

D'où $M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

De même que précédemment, je vous donne uniquement les solutions...

(ii) $M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -7 & -2 \end{bmatrix}$.

(iii) $M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$.

# Exercice 3:

1. $\det(M) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = -a.\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3a$ donc M est inversible ssi $a \neq 0$.

2. $Co\,(M) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ a & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ a & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-4a & -2 & a \\ 4-a & -2 & a \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t Co\,(M) = \frac{1}{3a} \begin{bmatrix} 4-4a & 4-a & -6 \\ -2 & -2 & 3 \\ a & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4-4a}{3a} & \frac{4-a}{3a} & -2/a \\ \frac{-2}{3a} & \frac{-2}{3a} & 1/a \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Le système est équivalent à M.$\begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour $a = 1$.

Or si a=1 $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix} = M^{-1}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D'où finalement $\begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

# Exercice 4:

(i) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$ donc $x = \frac{8}{-1} = -8$.

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14$ et $y = -14$.

(ii) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$ donc $x = 3$.

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$ donc $y = -4$.

(iii) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y + z = 1 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$ donc $x = \frac{-4}{-4} = 1$.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -8$ donc $y = \frac{-8}{-4} = 2$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -16$ donc $z = \frac{-16}{-4} = 4$.

(on a ajouté la 3ème colonne aux deux autres).

On trouve donc $(x, y, z) = (1, 2, 4)$.

(iv) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ x + 3z = 4 - x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \text{ donc } x = \tfrac{-2}{2} = -1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \text{ donc } y = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \text{ donc } z = 4/2 = 2.$$

On trouve donc $(x, y, z) = (-1, 0, 2)$.

(v) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y/2 = 1 - z \\ y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y/2 + z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix} = -1 + 1/2 = -1/2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \text{ donc } x = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0 \text{ donc } y = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix} = -3 + 3/2 = -3/2 \text{ donc } z = 3.$$

On trouve donc $(x, y, z) = (2, 0, 3)$.

(vi) $\begin{cases} -x - z = 3 \\ x + y + z = 1 - y \\ -x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ -x + z = 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \text{ donc } x = \tfrac{10}{-4} = -5/2.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 2 - 1 = -8 \text{ donc } y = 2.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \text{ donc } z = -1/2.$$

On trouve donc $(x, y, z) = (-5/2, 2, -1/2)$.