Compléments sur le chapitre 6 : diagonalisation de matrice.

Exemple 30 :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ / $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + \beta & (1) \\ y = \quad\;\; 2\beta & (2) \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} y \end{cases}$$

D'où $(1) \Rightarrow 2\alpha = x - \frac{1}{2} y \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} y$

Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} y \\ \frac{1}{2} y \end{pmatrix}$ dans la base

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Exemple 31 :

Soit $A = \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

et soit $B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

$$P_{A \to B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array}$$

: matrice de passage de A vers B.

$P^{-1}_{A \to B} = P_{B \to A}$: matrice de passage de B vers A.

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta & (1) \\ 0 = 2\beta \Leftrightarrow \beta = 0 \end{cases}$

D'où (1) $\Rightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_B$

De même, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha + \beta & (1) \\ 1 = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où (1) $\Rightarrow 2\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$

donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}_B$

Ainsi, $P_{B \to A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} = P^{-1}_{A \to B}$.

Exemple 32 :

1/ $A = \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

sont 2 bases de $\mathbb{R}^2$.

On cherche $P^{-1}_{A \to B} = P_{B \to A}$

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2\beta \Leftrightarrow \beta = 1 \\ 0 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = -\beta = -1 \end{cases}$

D'où $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

De même, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} \\ 2 = \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = 2 - \beta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \alpha = 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

d'où $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_B$

Ainsi, $P_{B \to A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} = P^{-1}_{A \to B}$

2/ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2\alpha + \beta & (1) \\ 3 = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$

d'où $(1) \Rightarrow 2\alpha = 2 - \beta \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$

donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}_A$

3/ Pour connaître les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base B, il suffit de calculer $P^{-1}_{A \to B} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}_A$

c'est-à-dire $\underset{(2,2)}{\begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}} \underset{(2,1)}{\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}_A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

Vérification :

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= b_1} + 1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= b_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ OK

Exemple 33 :

$\underset{(2,3)}{A}$, $\underset{(2,3)}{B}$. $\text{rang}(A) \leq 2$ et $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$

donc $\text{rang}(A) = 2$.

$\text{rang}(B) \leq 2$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$ donc $\text{rang}(B) = 2$

Comme A et B ont même format et $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$, A et B sont équivalentes.

Exemple 34 :

- Soient $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto f_1(x,y) = (x+2y\,;\, y+2x)$$

$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \mapsto f_2(x,y,z) = (x-y\,;\, -x+z\,;\, -2x+y+z)$$

On veut diagonaliser les matrices représentatives des applications linéaires f_1 et f_2.

Soient M_i la matrice représentative de l'application linéaire f_i, $i = 1, 2$ en considérant la base canonique au départ et à l'arrivée.

- $M_1 = \begin{pmatrix} f_1(1,0) & f_1(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculons le polynôme caractéristique :

$$P_{M_1}(\lambda) := \det(M_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2^2$$

$$= (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (-1-\lambda)(3-\lambda)$$

$$P_{M_1}(\lambda) = 0 \iff (-1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 3$$

Les valeurs propres (v.p.) de M_1 sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$.

Vérification : 1) $\det(M_1) = 1 - 4 = -3$

et $\lambda_1 \times \lambda_2 = -1 \times 3 = -3$ donc $\det(M_1) = \lambda_1 \times \lambda_2$ OK

2) $\text{Trace}(M_1) = 1 + 1 = 2$

et $\lambda_1 + \lambda_2 = -1 + 3 = 2$ donc $\text{Trace}(M_1) = \lambda_1 + \lambda_2$ OK.

Comme M_1 est une matrice $(2,2)$ qui admet 2 v.p. simples (i.e. de multiplicité 1) alors (d'après le corollaire 19.1)

M_1 est diagonalisable.

Cherchons l'espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = -1$:

$$E_{\lambda_1} = \{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / M_1 . X = \lambda_1 . X \}$$
$$= \{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (M_1 - \lambda_1 I). X = 0 \}$$
$$= \{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (M_1 + I). X = 0 \}$$

Or $(M_1 + I). X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

d'où $E_{\lambda_1} = \{ (x ; -x) / x \in \mathbb{R} \}$
$$= \{ x (1 ; -1) / x \in \mathbb{R} \}$$
$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Une base de E_{λ_1} est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$
$=$ multiplicité de λ_1.

Un $v\vec{p}$ (vecteur propre) est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = V_1$.

• Cherchons l'espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2 = 3$:

$$E_{\lambda_2} = \{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (M_1 - \lambda_2 I). X = 0 \}$$
$$= \{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (M_1 - 3I). X = 0 \}$$

Or $(M_1 - 3I) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = y$

d'où $E_{\lambda_2} = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1, 1) / x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Une base de E_{λ_2} est $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$

= multiplicité de λ_2.

Un $\vec{v}$p est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$

Comme $\dim(E_{\lambda_i})$ = multiplicité de λ_i, $i = 1, 2$ on a vérifié que M_1 est diagonalisable, d'où la décomposition $M_1 = P \cdot D \cdot P^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(P) = 2 \neq 0$, $Co(P) = \begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

normal car P matrice de passage

d'où ${}^tCo(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$P^{-1} = \dfrac{{}^tCo(P)}{\det(P)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

• De même, $M_2 = \left(f_2(1,0,0) \quad f_2(0,1,0) \quad f_2(0,0,1) \right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{M_2}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1+C_2+C_3 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -\lambda & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2-L1 \\ L3-L1 \end{array}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left[(1-\lambda)^2 - 2 \right] = -\lambda \left[(1-\lambda)^2 - (\sqrt{2})^2 \right]$$

$$= -\lambda \, (1-\sqrt{2}-\lambda)\,(1+\sqrt{2}-\lambda)$$

$P_{M_2}(\lambda) = 0 \iff -\lambda\,(1-\sqrt{2}-\lambda)\,(1+\sqrt{2}-\lambda) = 0$

$\iff \lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = 1-\sqrt{2} \ , \ \lambda_3 = 1+\sqrt{2}$.

Les v.p. de M_2 sont donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1+\sqrt{2}$.

Vérification : 1) $\det(M_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1+1 = 0$

et $\det(M_2) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 0 \times (1-\sqrt{2}) \times (1+\sqrt{2}) = 0$ OK

2) $\mathrm{Trace}(M_2) = 1+0+1 = 2$

et $\mathrm{Trace}(M_2) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 1-\sqrt{2} + 1+\sqrt{2} = 2$ OK

Comme M_2 est une matrice $(3,3)$ qui admet 3 vp simples (i.e. de multiplicité 1) alors (d'après le corollaire 19.1) M_2 est diagonalisable.

. De plus, on a :

$$E_{\lambda_1} = \{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (M_2 - \lambda_1 I).X = 0 \}$$
$$= \{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, M_2 . X = 0 \}$$

Or $M_2 . X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 & (1) \iff x = y \\ -x + z = 0 & (2) \iff x = z \\ -2x + y + z = 0 & (3) \end{cases}$$

d'où $x = y = z$ et (3) $\Rightarrow -2x + x + x = 0 \iff 0 = 0$ toujours vrai

donc $E_{\lambda_1} = \{ (x,x,x) \,/\, x \in \mathbb{R} \}$
$$= \{ x(1,1,1) \,/\, x \in \mathbb{R} \}$$
$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Une base de E_{λ_1} est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$

= multiplicité de λ_1.

. Un $\vec{vp}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V_1$.

. $E_{\lambda_2} = \{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (M_2 - \lambda_2 I).X = 0 \}$
$$= \{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (M_2 - (1-\sqrt{2})I).X = 0 \}$$

Or $(M_2 - (1-\sqrt{2})I).X = 0 \iff \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -1+\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\,.\,x - y = 0 & (1) \Leftrightarrow y = \sqrt{2}\,.\,x \\ -x + (-1+\sqrt{2})y + z = 0 & (2) \\ -2x + y + \sqrt{2}\,z = 0 & (3) \end{cases}$$

D'où (2) $\Rightarrow -x + (-1+\sqrt{2}).\sqrt{2}.\,x + z = 0$

$\Leftrightarrow -x - \sqrt{2}\,x + 2x + z = 0 \Leftrightarrow x(1-\sqrt{2}) + z = 0 \Leftrightarrow z = (\sqrt{2}-1).x$

(3) $\Rightarrow -2x + \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,z = 0 \Leftrightarrow -2x + \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}.(\sqrt{2}-1).x = 0$

$\Leftrightarrow -2x + \cancel{\sqrt{2}\,x} + 2x - \cancel{\sqrt{2}\,x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ toujours vrai

D'où $E_{\lambda_2} = \{(x ; \sqrt{2}.x ; (\sqrt{2}-1)x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1 ; \sqrt{2} ; \sqrt{2}-1) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\right)$

Une base de E_{λ_2} est $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$

= multiplicité de λ_2.

Un $\vec{vp}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} = V_2$.

• $E_{\lambda_3} = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (M_2 - \lambda_3 I).X = 0\}$

$= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (M_2 - (1+\sqrt{2})I).X = 0\}$

Or $(M_2 - (1+\sqrt{2})I).X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -1-\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}\,x - y = 0 \ (1) \Leftrightarrow \quad y = -\sqrt{2}.\,x \\ -x + (-1-\sqrt{2})\,y + z = 0 \ (2) \\ -2x + y - \sqrt{2}\,z = 0 \ (3) \end{cases}$$

D'où $(2) \Rightarrow -x + (-1-\sqrt{2}).(-\sqrt{2}\,x) + z = 0$

$\Leftrightarrow -x + \sqrt{2}\,x + 2x + z = 0 \Leftrightarrow x(1+\sqrt{2}) + z = 0$

$\Leftrightarrow z = -x(1+\sqrt{2})$

d'où $(3) \Rightarrow -2x - \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,(-x(1+\sqrt{2})) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{-2x} \cancel{-\sqrt{2}\,x} + \cancel{\sqrt{2}\,x} + \cancel{2x} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ toujours vrai

D'où $E_{\lambda_3} = \{(x\,;-\sqrt{2}.x\,;-x(1+\sqrt{2}))\ /x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1\,;-\sqrt{2}\,;-1-\sqrt{2})\ /x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$

Une base de E_{λ_3} est donc $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$, d'où $\dim(E_{\lambda_3}) = 1$

$=$ multiplicité de λ_3.

Un $\vec{vp}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = V_3$.

Comme $\dim(E_{\lambda_i}) =$ multiplicité de λ_i, $i = 1, 2, 3$ on a vérifié que M_2 est diagonalisable d'où $M_2 = P.\,D.\,P^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$P = (V_1 \quad V_2 \quad V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-\cdot \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{2}(-1-\sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) - (-1\cancel{-\sqrt{2}}\cancel{+\sqrt{2}}) + \cancel{\sqrt{2}} - 1 - \cancel{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2} \cancel{-2} \cancel{+2} - \sqrt{2} \cancel{+1} \cancel{-1}$$

$$= -2\sqrt{2} \neq 0$$

$$Co(P) \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 2\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tCo(P) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 1 & -2-\sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \\ -1 & 2-\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

et donc $P^{-1} = \dfrac{{}^tCo(P)}{\det(P)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} & \dfrac{-2-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} & \dfrac{\sqrt{2}+1}{-2\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & \dfrac{2-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} & \dfrac{\sqrt{2}-1}{-2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$(*)\ Co(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple 35 :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(6-\lambda) + 15$$

$= -12 + 2\lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 15$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

donc $\lambda_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$; $\lambda_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$

d'où $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Les v.p. de A sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

Vérification : 1) $\det(A) = -12 + 15 = 3$ et

$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 = 1 \times 3 = 3$ OK

2) $\text{Trace}(A) = -2 + 6 = 4$ et

$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 3 = 4$ OK

Comme A est une matrice (2, 2) qui admet 2 vp simples,
A est diagonalisable.

$$E_{\lambda_1} = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (A - \lambda_1 I).X = 0\}$$

$$= \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (A - I).X = 0\}$$

Or $(A - I).X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y = 0 \\ -3x + 5y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -3x + 5y = 0 \Leftrightarrow -3x = -5y \Leftrightarrow y = \frac{3}{5} x$

D'où $E_{\lambda_1} = \{ (x ; \frac{3}{5} x) / x \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x(1 ; \frac{3}{5}) / x \in \mathbb{R} \}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \end{pmatrix}\right)$

Une base de E_{λ_1} est $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \end{pmatrix}\right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$

= multiplicité de λ_1 et un $\vec{vp}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \end{pmatrix} = V_1$.

$E_{\lambda_2} = \{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (A - \lambda_2 I) . X = 0 \}$

$= \{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (A - 3 I) . X = 0 \}$

Or $(A - 3I).X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 5x = 5y \\ 3x = 3y \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = y \\ x = y \end{matrix}$

d'où $E_{\lambda_2} = \{ (x ; x) / x \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x(1 ; 1) / x \in \mathbb{R} \}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Une base de E_{λ_2} est $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$ = multiplicité de λ_2 et un $\vec{vp}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$.

D'où $A = P . D . P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$P = (V_1 \; V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $\det(P) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \neq 0$

et $Co(P) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tCo(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \dfrac{{}^tCo(P)}{\det(P)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

D'où $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

De même, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$P_B(\lambda) := \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda) - 1$

$= -2 + \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1 \quad = \lambda^2 - \lambda - 3$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$

donc $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

d'où $P_B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

Les vp de B sont donc λ_1 et λ_2

Vérification : 1) $\det(B) = -2 - 1 = -3$ et

$\det(B) = \lambda_1 \times \lambda_2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \times \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right) = \dfrac{(1-\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}{4}$

$= \dfrac{1^2 - \sqrt{13}^2}{4} = -\dfrac{12}{4} = -3$ OK

2) $\mathrm{Trace}(B) = -1 + 2 = 1$ et

$\mathrm{Trace}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}+1+\sqrt{13}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ OK.

$\lrcorner$

Comme B est une matrice (2, 2) qui admet 2 vp simples, B est diagonalisable. 6-8

$$E_{\lambda_1} = \left\{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \left(B - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) I\right). X = 0 \right\}$$

Or $\left(B + \frac{-1+\sqrt{13}}{2} . I\right) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2-1+\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{4-1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right) x + y = 0 & \Leftrightarrow x = \frac{-2y}{-3+\sqrt{13}} \\ x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) y = 0 & \Leftrightarrow x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} y \end{cases}$$

Vérification : $\frac{-2y}{-3+\sqrt{13}} = \frac{(-3-\sqrt{13})y}{2}$

$\Leftrightarrow -4y = (-3+\sqrt{13})(-3-\sqrt{13})y$ (Produit en croix)

$\Leftrightarrow -4y = (+9+3\cancel{\sqrt{13}}-3\cancel{\sqrt{13}}-13)y$

$\Leftrightarrow -4y = -4y$ Vrai

d'où $E_{\lambda_1} = \left\{ \left(\frac{-2y}{-3+\sqrt{13}} ; y\right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ y \left(\frac{-2}{-3+\sqrt{13}} ; 1\right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{-2}{-3+\sqrt{13}} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Une base de E_{λ_1} est $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-2}{-3+\sqrt{13}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$

= multiplicité de λ_1 et un $\vec{vp}$ est donc $\begin{pmatrix} \frac{-2}{-3+\sqrt{13}} \\ 1 \end{pmatrix} = V_1$

$E_{\lambda_2} = \left\{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left(B - \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) I\right) . X = 0 \right\}$

Or $\left(B + \frac{-1-\sqrt{13}}{2} I\right) . X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right) x + y = 0 & \Leftrightarrow x = \frac{-2y}{-3-\sqrt{13}} \\ x + \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) y = 0 & \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} y \end{cases}$

Vérification : $\frac{-2y}{-3-\sqrt{13}} = \frac{(-3+\sqrt{13})\, y}{2}$

$\Leftrightarrow -4y = (-3-\sqrt{13})(-3+\sqrt{13})\, y$

$\Leftrightarrow -4y = (+9 - 3\sqrt{13} + 3\sqrt{13} - 13)\, y$

$\Leftrightarrow -4y = -4y$ vrai OK

D'où $E_{\lambda_2} = \left\{ \left(\frac{-2y}{-3-\sqrt{13}} ; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ y \left(\frac{-2}{-3-\sqrt{13}} ; 1 \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{-2}{-3-\sqrt{13}} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Une base de E_{λ_2} est $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-2}{-3-\sqrt{13}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$

= multiplicité de λ_2 et un $\vec{vp}$ est donc $\begin{pmatrix} \frac{-2}{-3-\sqrt{13}} \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$.

D'où $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-2}{-3+\sqrt{13}} & \frac{-2}{-3-\sqrt{13}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\det(P) = \frac{-2}{-3+\sqrt{13}} + \frac{2}{-3-\sqrt{13}} = \frac{-2(-3-\sqrt{13})+2(-3+\sqrt{13})}{(-3+\sqrt{13})(-3-\sqrt{13})}$

$$= \frac{\cancel{6}+2\sqrt{13}-\cancel{6}+2\sqrt{13}}{(-3+\sqrt{13})(-3-\sqrt{13})} = \frac{4\sqrt{13}}{(-3+\sqrt{13})(-3-\sqrt{13})} = \frac{4\sqrt{13}}{(-3)^2-(\sqrt{13})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{13}}{-4} = -\sqrt{13} \neq 0$$

$$Co(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{-3-\sqrt{13}} & \frac{-2}{-3+\sqrt{13}} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tCo(P) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{-3-\sqrt{13}} \\ -1 & \frac{-2}{-3+\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}(-3-\sqrt{13})} \\ \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}(-3+\sqrt{13})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{-3\sqrt{13}-13} \\ \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{2}{-3\sqrt{13}+13} \end{pmatrix}$

et donc $B^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$

avec $D^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^k \end{pmatrix}$.

Exemple 36 :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 4Y_n \\ Y_{n+1} = 2X_n + 3Y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

La solution de ce système est $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$

Il faut diagonaliser A.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8$

$= 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 5$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$

donc $\lambda_1 = \frac{4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{4-6}{2} = -1$, $\lambda_2 = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} = 5$

d'où $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$.

Les vp sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 5$

Vérification : 1) $\det(A) = 3 - 8 = -5$ et

$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 = (-1) \times 5 = -5$ OK

2) $\mathrm{Trace}(A) = 1 + 3 = 4$ et

$\mathrm{Trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -1 + 5 = 4$ OK.

Comme A est une matrice $(2,2)$ qui admet 2 vp simples, A est diagonalisable.

$E_{\lambda_1} = \{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (A + I) . X = 0 \}$

Or $(A+I).X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} x$

d'où $E_{\lambda_1} = \{ (x ; -\frac{1}{2} x) / x \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x (1 ; -\frac{1}{2}) / x \in \mathbb{R} \}$

$= \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$

Une base de E_{λ_1} est donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$ d'où $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$ $=$ multiplicité de λ_1 et un $\vec{vp}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = V_1$.

- $E_{\lambda_2} = \{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (A - 5I) . X = 0 \}$

Or $(A-5I).X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 & \Leftrightarrow y = x \\ 2x - 2y = 0 & \Leftrightarrow y = x \end{cases}$

Donc $E_{\lambda_2} = \{ (x ; x) / x \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x (1 ; 1) / x \in \mathbb{R} \}$

$= \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Une base de E_{λ_2} est donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'où

$\dim(E_{\lambda_2}) = 1 =$ multiplicité de λ_2 et un $\vec{vp}$ est

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$.

D'où $A = P.\,D.\,P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det(P) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$

et $Co(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tCo(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

De plus, $A^n = P.\,D^n.\,P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ ☐