TD de Microéconomie n°6 : fonction de production :

Définitions :

Les facteurs de production:
On a l'habitude en économie de parler d'input.
Ce sont donc les input qui sont utilisées dans le processus de production :

- Terre
- Travail
- matière première
- Capital physique
- Capital financier
- Capital humain (un peu particulier car il est incorporé dans le facteur travail, on le présente à part mais il est fondamental aujourd'hui, il correspond à l'amélioration du travail générée par l'éducation et le savoir)

Facteur fixe et facteur variable :
La distinction entre les 2 nécessite le fait de prendre en compte la durée de la période, retenue pour l'analyse. On peut alors dire que sur le long terme tous les facteurs deviennent variables.
Si on raisonne sur une période assez courte, beaucoup de facteurs seront fixes: il ne sera pas possible d'ajuster les quantités de certains facteurs.
Si on raisonne sur une période assez longue, la plupart des facteurs sont variables: l'entreprise pourra ajuster les quantités de tous les facteurs.

Productivité :
Sans faire référence à la microéconomie, la productivité d'une activité, c'est sa capacité à générer une production.
C'est le fait de considérer qu'une activité est plus ou moins efficace.

La productivité d'un facteur :
Elle peut être mesurée en moyenne ou à la marge.

- La productivité moyenne du travail : production/nombre d'unités de travail (mesuré en j, en heures, ou en personnes travaillant sur le projet)
- La productivité marginale du travail : variation de la production/variation du nombre d'unités de travail

	Production en millions de m3 de bois par an	Nombre de bûcherons
1970	23,7	14.900
1987	34,3	12.000

On admettra que chaque bûcheron travaille 200 jours par an et 8 heures par jour.

Calcul de la productivité moyenne

1970	23,7 / (14.900 x 200 x 8) = 1 m³ / h.
1987	34,3 / (12.000 x 200 x 8) = 1,8 m³ / h.

Ainsi, avec un effectif plus réduit, chaque bûcheron a coupé 80 % de bois en plus.

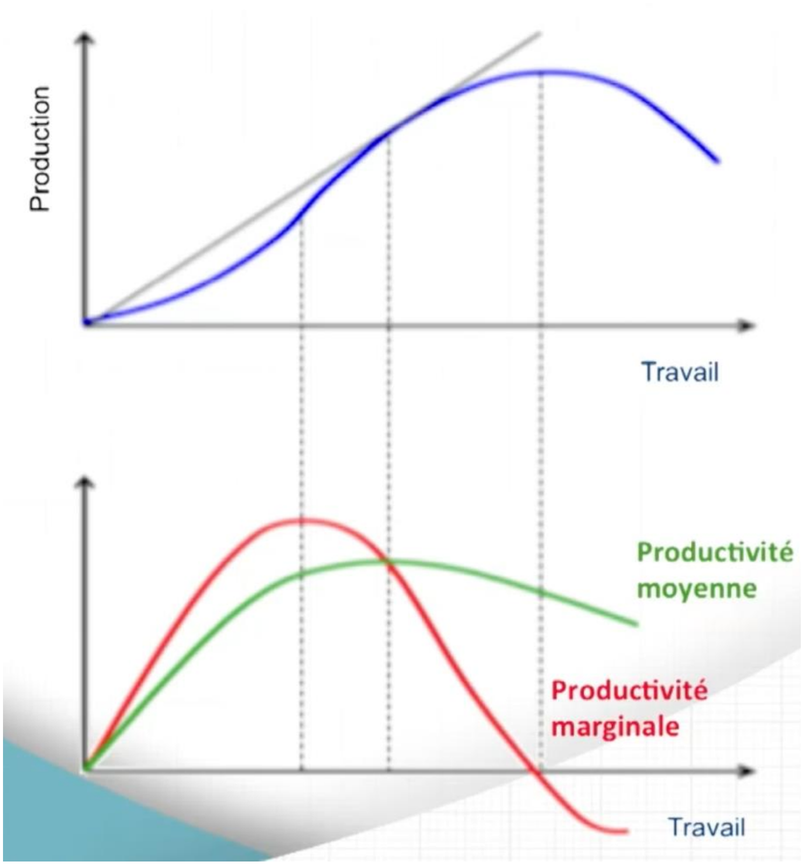
On dira que la productivité moyenne a augmenté de 80%. On dira aussi que l'industrie forestière a connu d'importants **gains de productivité** en 15 ans.

On va expliquer ces gains de productivité par des facteurs évidents qui concernent le facteur travail (étudié dans cet exemple).
On peut donc lister les causes des gains de productivité :

- Amélioration des qualifications (on recrute du personnel + qualifié)
- Meilleur alimentation des bûcherons
- Meilleure santé
- Mécanisation des processus d'abatage

La loi de la productivité marginale décroissante (loi des rendements marginaux décroissants) :
Mécanisme qui est très important en microéconomie, nous sommes dans une analyse de CT.
Nous avons un facteur variable et les autres sont considérés comme fixe, et on s'intéresse toujours à la productivité du facteur travail en bloquant les autres facteurs.
Conditions d'application : cette loi s'applique à court terme lorsqu'au moins un facteur de production est fixe, c'est-à-dire par exemple, pour une technologie de production donnée.

Loi : la productivité marginale du facteur variable finira toujours par décroître, même si elle a pu commencer par croître.

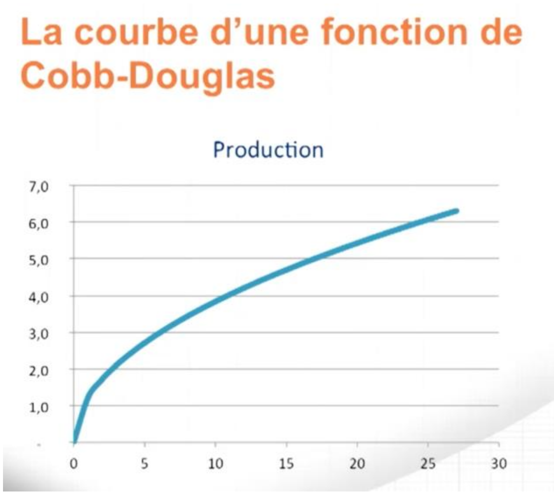


La fonction de production de Cobb-Douglas :
C'est une fonction de production très classique.
Cobb et Douglas ont cherché à théoriser les relations entre la quantité de facteurs et la production obtenue.

$$f(K,L) = A.K^{\alpha}.L^{\beta}$$

$$f(K,L) = A.K^{0,8}.L^{0,5}$$

Admettons que :
A = 0,4
et pour K = 4



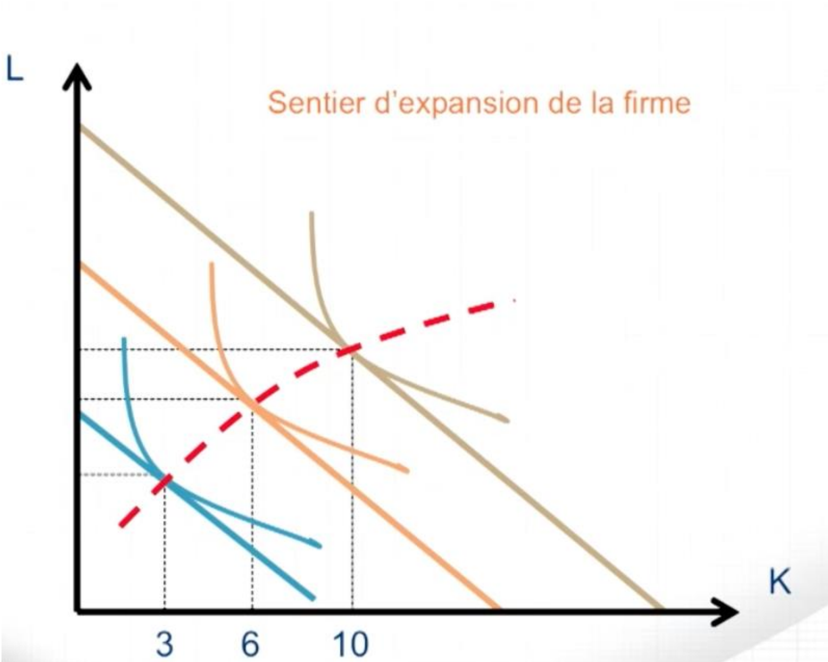
<u>Propriétés :</u> comme le montre le graphique, la production est croissante à taux décroissant. Cela signifie que la productivité marginale est décroissante. Mais elle ne sera jamais négative car la production n'est jamais décroissante.

<u>Le taux marginal de substitution technique (TMST) :</u>
Il mesure la quantité de facteur K que le producteur doit retirer lorsqu'il ajoute une unité supplémentaire du facteur L, à niveau de production constant.

$$TMST = \lim_{\Delta L \to 0} -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{dK}{dL}$$

Quand j'ajoute ou retire un peu de L, je suis obligé d'ajouter ou de retirer un certain nombre de K.
Cela donne une information sur la spécificité de la combinaison productive.

<u>Le sentier d'expansion :</u>
Il décrit les combinaisons optimales des facteurs de production, sur le même principe que la courbe de consommation-revenu pour le producteur.
C'est donc une courbe, peut-être une droite, qui relie les différentes points des différents optimums.



Sur ce graphique, on a L en ordonnée et K en abscisse.
Normalement on veut K en ordonnée et L en abscisse.
Nous sommes dans une situation, contrairement à la productivité du facteur travail, où les facteurs L et K augmentent.
On est dans une situation de moyen ou long terme.

Questions :

A) Soit la fonction de production suivante : $f(K,L) = \sqrt{K.L}$
Indiquer la forme générale des isoquants et représenter l'isoquant lorsque f(K,L) = 1. Déterminer le TMST lorsque L = 2 et K = 0,5 puis indiquer la signification du résultat obtenu.

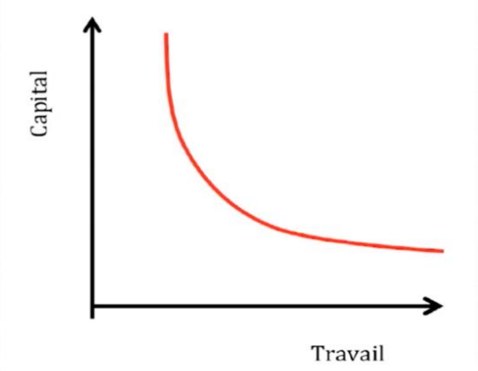
A) Soit une fonction de production : $f(K,L) = \sqrt{K.L}$

$$P = f(K,L) = \sqrt{K.L} = (K.L)^{1/2}$$

Pour un niveau donné de production P_o on peut écrire : $K = \frac{P_o^2}{L}$

Pour f(K,L) = P_o = 1 on peut écrire : $K = \frac{1}{L}$

Simple branche d'hyperbole



$$TMST = - dK / dL = - (- 1 / L^2) = 1 / L^2$$

Au point A (2 ; 0,5) on a donc : $TMST = \frac{1}{4} = 0,25$

Cela signifie que si le producteur décide, à partir du point A, d'ajouter une petite quantité de travail (dL), il devra supprimer une petite quantité de capital (approximativement dK = 0,25 * dL) pour rester sur la même isoquante.

B) Soit la fonction de production suivante, où x et y représentent respectivement les quantités de facteur travail et capital :

$$f(x,y) = (x.y) / (2.x + y) \qquad \text{pour } x > 0 \text{ et } y > 0$$

Calculer et interpréter l'élasticité de substitution.

B) Soit une fonction de production : $f(x,y) = \frac{xy}{2x+y}$

L'élasticité de substitution :

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}}{\dfrac{dTMS}{TMS}}$$

Posons : m = y / x

L'élasticité de substitution devient :

$$\sigma = \frac{\dfrac{dm}{m}}{\dfrac{dTMS}{TMS}} = \frac{dm}{dTMS} * \frac{TMS}{m}$$

Calculons le TMS :

$$fx'(x,y) = [\, y.(2.x + y) - 2.x.y \,] / [\, (2.x + y)^2 \,] = y^2 / (2.x + y)^2$$

$$fy'(x,y) = [\, x.(2.x + y) - x.y \,] / [\, (2.x + y)^2 \,] = 2.x^2 / (2.x + y)^2$$

$$TMS = fx'(x,y) / fy'(x,y) = y^2 / (2.x^2) = m^2 / 2$$

Maintenant, revenons à la formule de calcul de l'élasticité de substitution :

$$\sigma = \frac{\dfrac{dm}{m}}{\dfrac{dTMS}{TMS}} = \frac{dm}{dTMS} * \frac{TMS}{m}$$

Prenons l'inverse du premier terme :

$$dTMS / dm = m$$

donc :

$$dm / dTMS = 1 / m = x / y \qquad (a)$$

Passons au second terme :

$$TMS / m = (m^2 / 2) / m = m / 2 = y / 2.x \qquad (b)$$

d'où :

$$\sigma = (a) * (b) = (x / y) * (y / 2.x) = 0,5$$

Sur une courbe d'indifférence, lorsque le TMS décroît d'une petite quantité (d), alors le rapport des facteurs décroît aussi d'une petite quantité (σ.d). Cette élasticité permet d'apprécier la facilité avec laquelle on peut substituer les facteurs entre eux.

Exercices :

I - Linéarité et non-linéarité du sentier d'expansion

Soit f une fonction de production du type Cobb-Douglas,
définie de $IR^{+*} \times IR^{+*}$ dans IR^{+*} : $q = f(x, y) = x^{1/2} . y^{1/3}$
[où x et y sont les quantités de facteurs employés].
p_X et p_Y représentent respectivement les prix des inputs x et y vendus par Durand.

a - En supposant que le producteur Dupont dispose d'un budget B_O ($B_O > 0$), établir :
- l'équation du sentier d'expansion.
- les fonctions de demande en inputs du producteur,

b - Si $p_X = p_Y = 2$ et $B_O = 20$, calculer les coordonnées du point candidat et la valeur de q associée à ce programme de production.

Imaginons maintenant que Durand se trouve dans une situation de force face au producteur Dupont en ce qui concerne l'input x : Durand augmente son prix de vente lorsque Dupont accroît ses commandes. La relation permettant de définir le prix de cet input est la suivante :
$p_X = 2 + (x^{1/2}/10)$. On suppose que p_Y et B_O n'ont pas varié (référence question b -).

c - Calculer l'équation du nouveau sentier d'expansion.
d - Fournir une valeur approchée du nouveau programme de production
e - En déduire la quantité produite et conclure par rapport à la question b -.

Exercice $q = f(x, y) = x^{1/2} * y^{1/3}$

A) Equation du sentier et fonctions de demande en inputs

Le producteur doit résoudre :

Max : $q = f(x, y) = x^{1/2} * y^{1/3}$

SC : $x.p_x + y.p_y = B_0$

On écrit le lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \underbrace{x^{1/2} * y^{1/3}} + \lambda . \underbrace{(x.p_x + y.p_y - B_0)}$$

On pose ensuite les conditions du 1er ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

A partir des équations (1) et (2) du système, on obtient :

$$y = \frac{2x.p_x}{3.p_y}$$

Cette relation est valable quel que soit le budget : c'est l'équation du sentier d'expansion.

C'est une droite de coefficient directeur $(2.p_x) / (3.p_y)$ et passant par l'origine.

En plaçant y dans (3), on obtient :

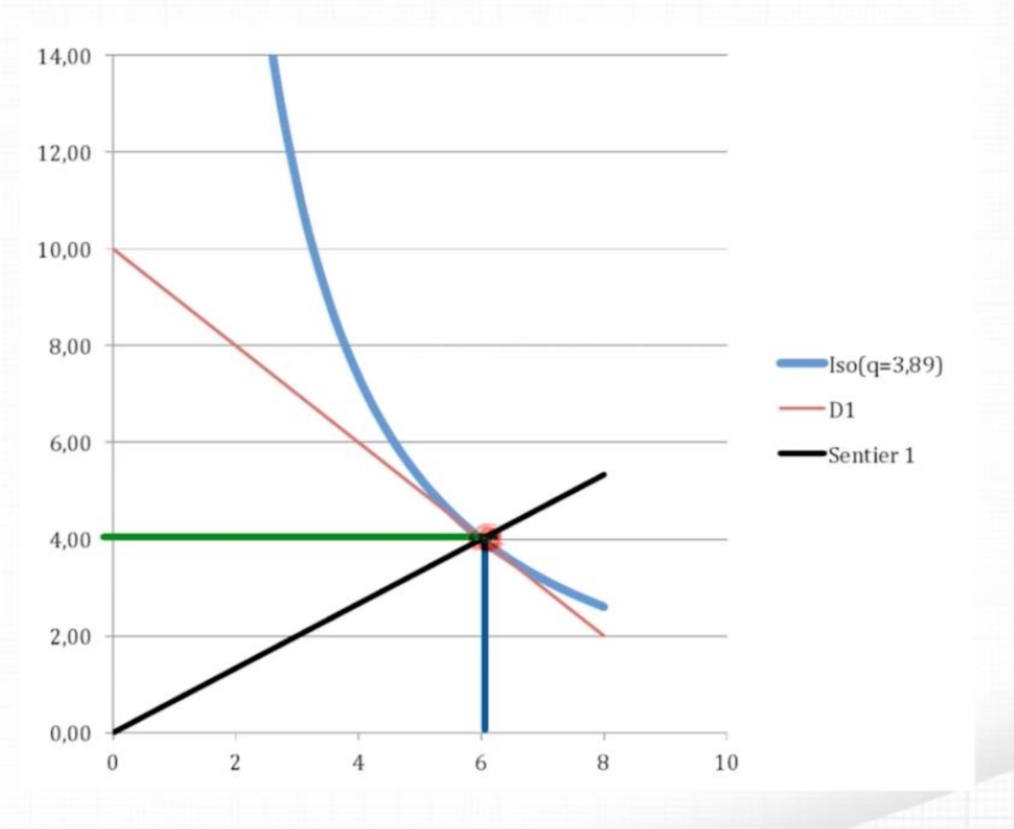
$$x^* = \frac{3.B_0}{5.p_x} \qquad y^* = \frac{2.B_0}{5.p_y}$$

Il s'agit des coordonnées du point candidat, pour chaque budget possible. Ces relations fournissent donc les fonctions de demande en inputs.

B) Si : px = py = 2 et Bo = 20

$$x^* = \frac{3.B_0}{5.p_x} = 6 \qquad y^* = \frac{2.B_0}{5.p_y} = 4$$

$$q^* = f(x, y) = x^{1/2} * y^{1/3} = 3,89$$



L'isoquante (en bleue) correspond à l'isoquante pour q=3,89.
La droite D1 est la contrainte budgétaire.
Le sentier d'expansion (en noir) est celui dont on a calculé l'équation, droite qui passe par 0.
Donc on retrouve le point (6 ;4) que l'on a calculé juste avant.

C) Si : $p_x = 2 + \frac{x^{1/2}}{10}$

On suppose que p_y et B_o n'ont pas varié

Il faut construire un nouveau lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^{1/2} * y^{1/3} + \lambda.(\, x.(2 + \frac{x^{1/2}}{10}) + y.p_y - B_0)$$

A partir des équations (1) et (2) du nouveau système, on obtient :

$$y = x.(\frac{2}{3} + \frac{x^{1/2}}{20})$$

C'est l'équation du nouveau sentier d'expansion … qui n'est donc plus linéaire.

D) Coordonnées optimales et quantité produite ?

En plaçant y dans la dernière équation du système, on obtient :

$$\frac{10}{3}x + \frac{1}{5}x^{3/2} - 20 = 0$$

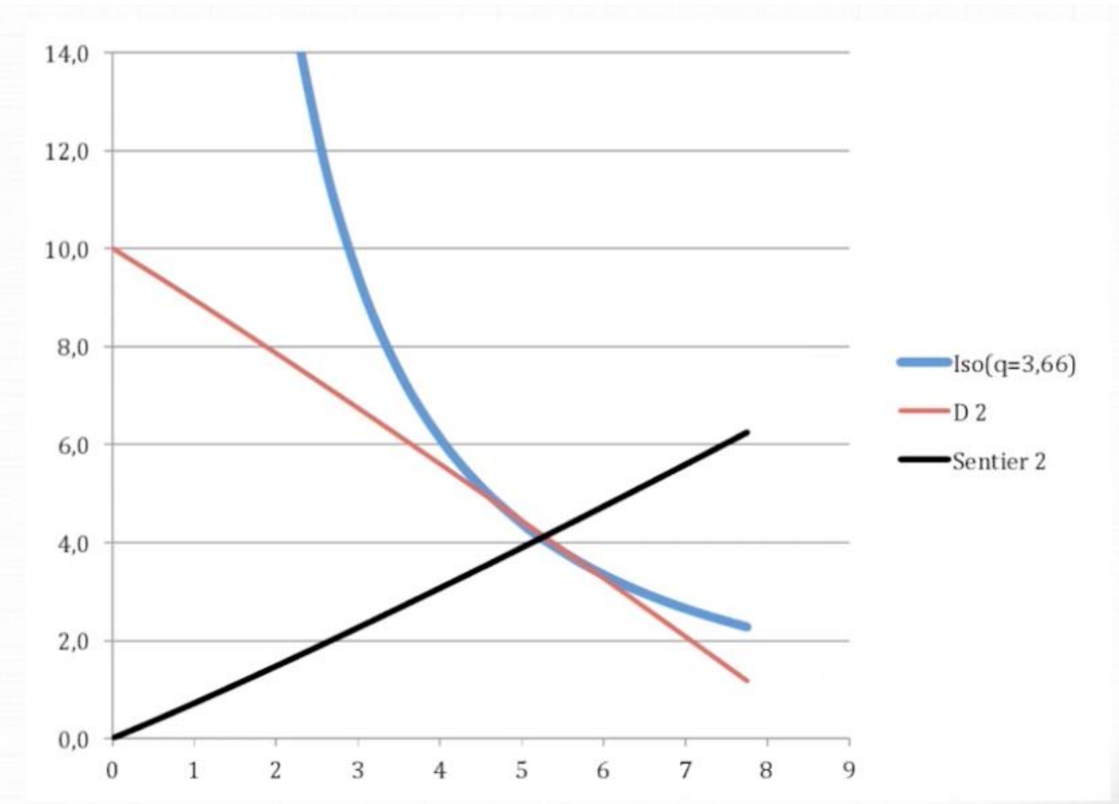
Puis par tâtonnement, on trouve :

$$x^* = 5,25 \qquad y^* = 4,10$$

La nouvelle quantité optimale produite par Dupont est : $q^* = 3,66$

Le fait que le fournisseur augmente son prix conduit à une baisse des quantités.

Le producteur adapte ses achats à la nouvelle tarification, moins avantageuse (puisque le prix de l'input x augmente lorsqu'il en utilise davantage) : ainsi, il consomme moins de x et plus de y.



Le sentier d'expansion n'est pas une droite (noire).
La droite de budget : D2.

II - Effet de revenu - effet de substitution - effet total (méthode de J. Hicks)

Soit f une fonction de production du type Cobb-Douglas,
définie de $IR^{+*} \times IR^{+*}$ dans IR^{+*} : $z = f(x, y) = x^{1/4} . y^{1/4}$
[où x et y sont les quantités des facteurs X et Y].
Cette production s'effectue sous la contrainte budgétaire suivante : $3.x + y = 20$

a - Déterminer l'équation de la ligne de niveau associée à une production de : $z = (100/3)^{1/4}$.
b - A l'aide du lagrangien, déterminer le(s) point(s) candidat(s) de cette fonction de production sous la contrainte budgétaire.
c - Quelles sont les conséquences d'un doublement du prix de Y (ceteris paribus) ?

Exercice 2 $z = f(x,y) = x^{1/4} * y^{1/4}$

A) Ligne de niveau ?

$$x^{1/4} * y^{1/4} = \left(\frac{100}{3}\right)^{1/4}$$

$$xy = \frac{100}{3} \iff y = \frac{100}{3x}$$

B) L'optimum ?

Le producteur doit résoudre :

$$\begin{cases} \text{Max : } & z = f(x,y) = x^{1/4} * y^{1/4} \\ \text{SC : } & 3x + y = 20 \end{cases}$$

On écrit le lagrangien :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^{1/4} * y^{1/4} + \lambda.(3x + y - 20)$$

On pose ensuite les conditions du 1er ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases}$$

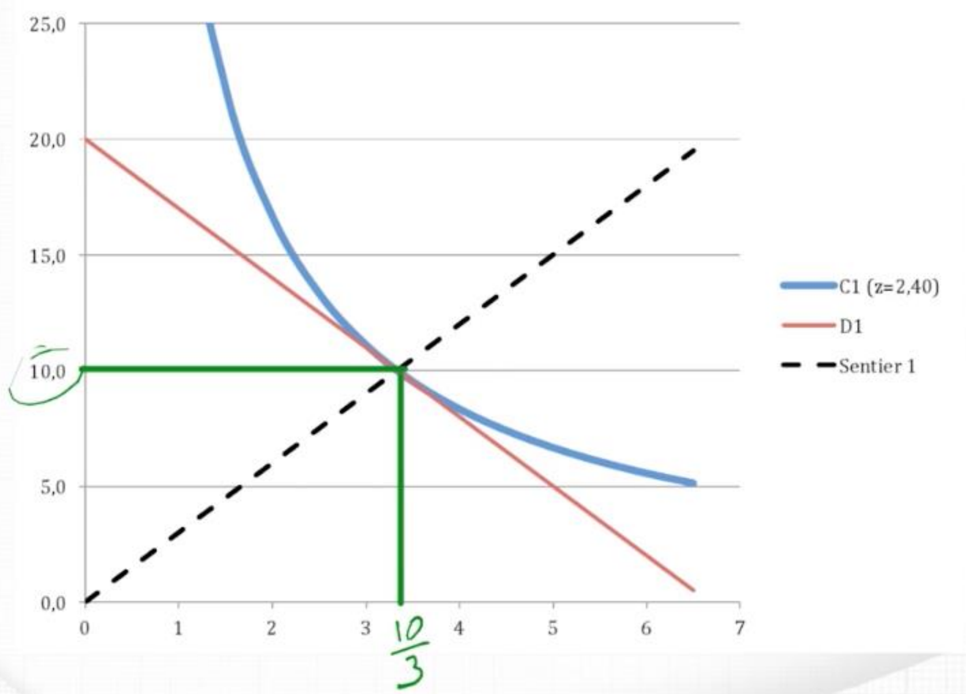
A partir des équations (1) et (2) du système, on obtient : $y = 3x$

C'est l'équation du sentier d'expansion.

En plaçant y dans (3), on obtient :

$$x^* = 10/3 \qquad y^* = 10$$

Il s'agit des coordonnées de l'optimum, pour un budget de 20 € et avec des prix de facteurs donnés par l'énoncé (3 € et 1€).



C) Optimum lorsque le prix du facteur Y double ?

Le producteur doit cette fois résoudre :

Max : $z = f(x, y) = x^{1/4} * y^{1/4}$

SC : $3x + 2y = 20$

On écrit le nouveau lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^{1/4} * y^{1/4} + \lambda.(3x + 2y - 20)$$

Je vous laisse poser les conditions du 1er ordre et résoudre le système.
On obtient :

$$x^* = 10/3 \qquad y^* = 5$$

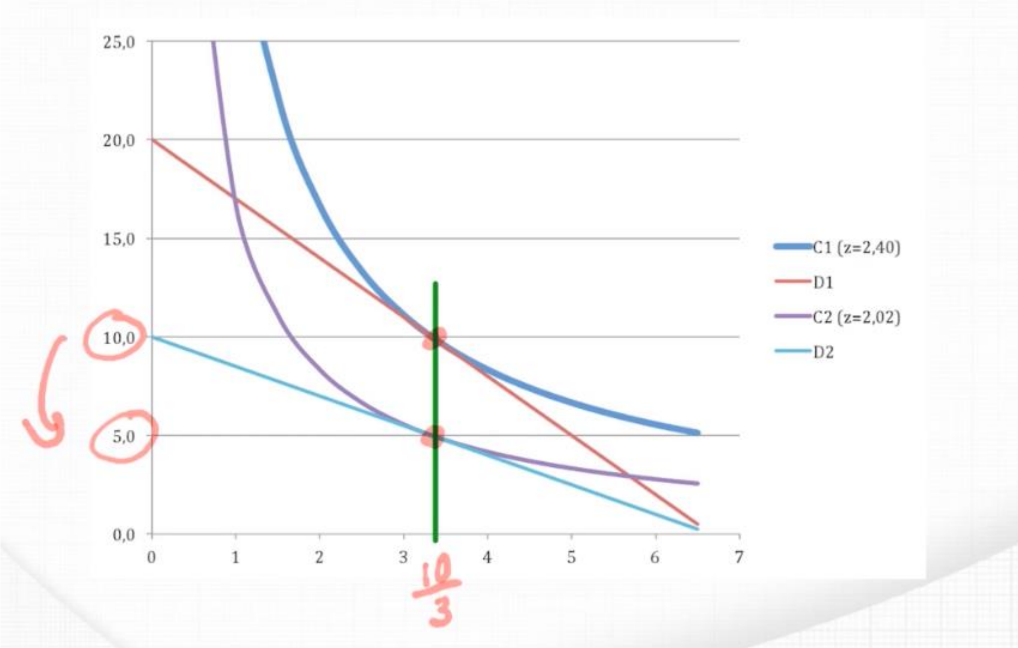
Il s'agit des coordonnées de l'optimum, toujours pour un budget de 20 € mais avec le prix de Y qui est passé de 1 € à 2 € (prix de X inchangé à 3 €).

Ainsi, le doublement du prix du facteur Y provoque :

a) une forte baisse d'utilisation de Y,

b) le facteur X continuant à être utilisé dans les mêmes quantités, mais pas dans les mêmes proportions puisque la production a diminué passant de $(100/3)^{1/4}$ = 2,40 à $(50/3)^{1/4}$ = 2,02)

On pourra graphiquement mettre en évidence les trois effets habituels.



On a perdu 5 unités.