Rappels fonctions puissances :

Fonctions puissances définies par $f(x) = x^n$

L'exposant de la fonction peut désigner un entier naturel, un entier relatif ou un réel.

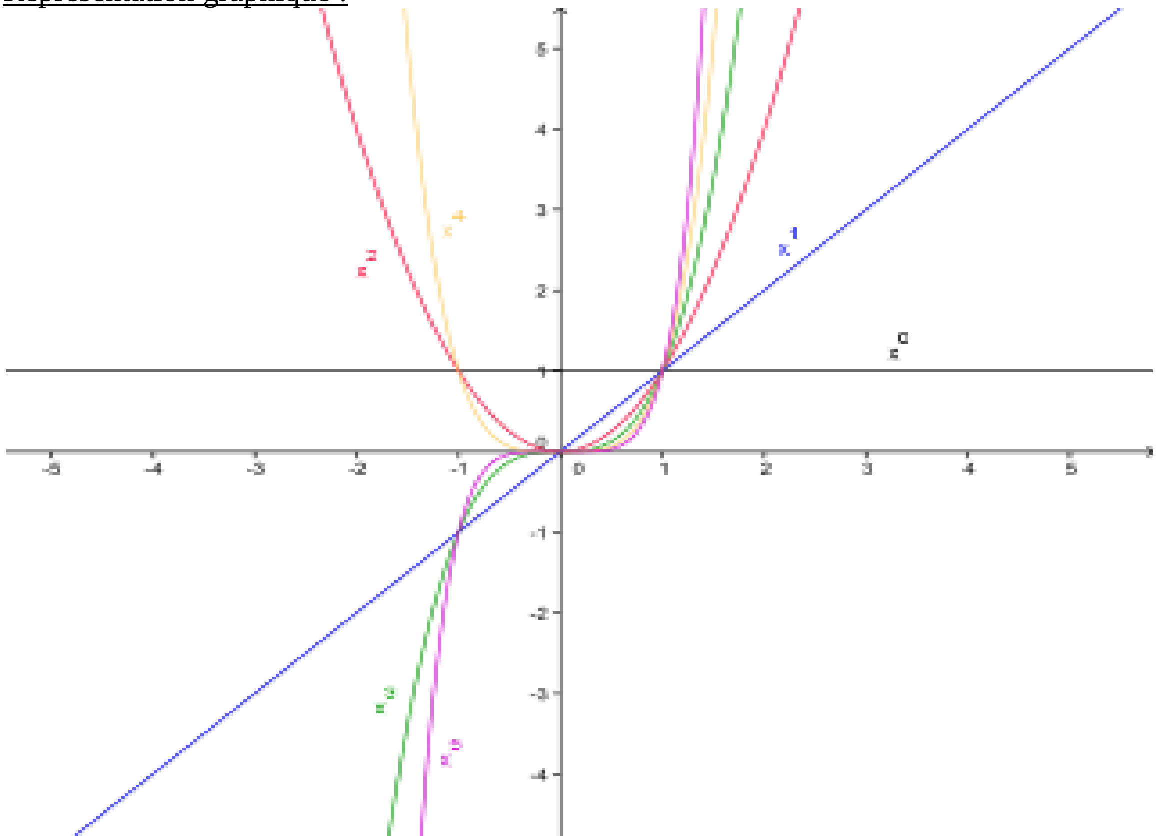
Remarque : Selon la nature de l'exposant, l'ensemble de définition de la fonction $f(x)$ peut changer.

1) L'exposant est un entier naturel (entier positif ou nul) :

Domaine de définition : $f(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$.

Dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

Représentation graphique :



Fonctions puissances pour un exposant 0 (noir), 1 (bleu), 2 (rouge : parabole), 3 (vert), 4 (orange), 5 (violet).

Remarque :

- Si n pair : la fonction $f(x) = x^n$ est paire : f(-x) = f(x) (symétrie axiale)
- Si n impair : la fonction $f(x) = x^n$ est impaire : f(-x) = - f(x) (symétrie centrale)

Croissance ou décroissance de $f(x) = x^n$ avec n entier naturel:

Sur $]0; +\infty[$, fonctions strictement croissantes (la fonction constante f(x) = x^0 = 1 étant mise à part).

Sur$]-\infty; 0[$, distinguer le cas des exposants pairs non nuls pour lesquels la fonction est strictement décroissante, et le cas des exposants impair, pour lesquels la fonction est strictement croissante. Si l'exposant est impair et différent de 1, la courbe possède un point d'inflexion à l'origine.

Limites:

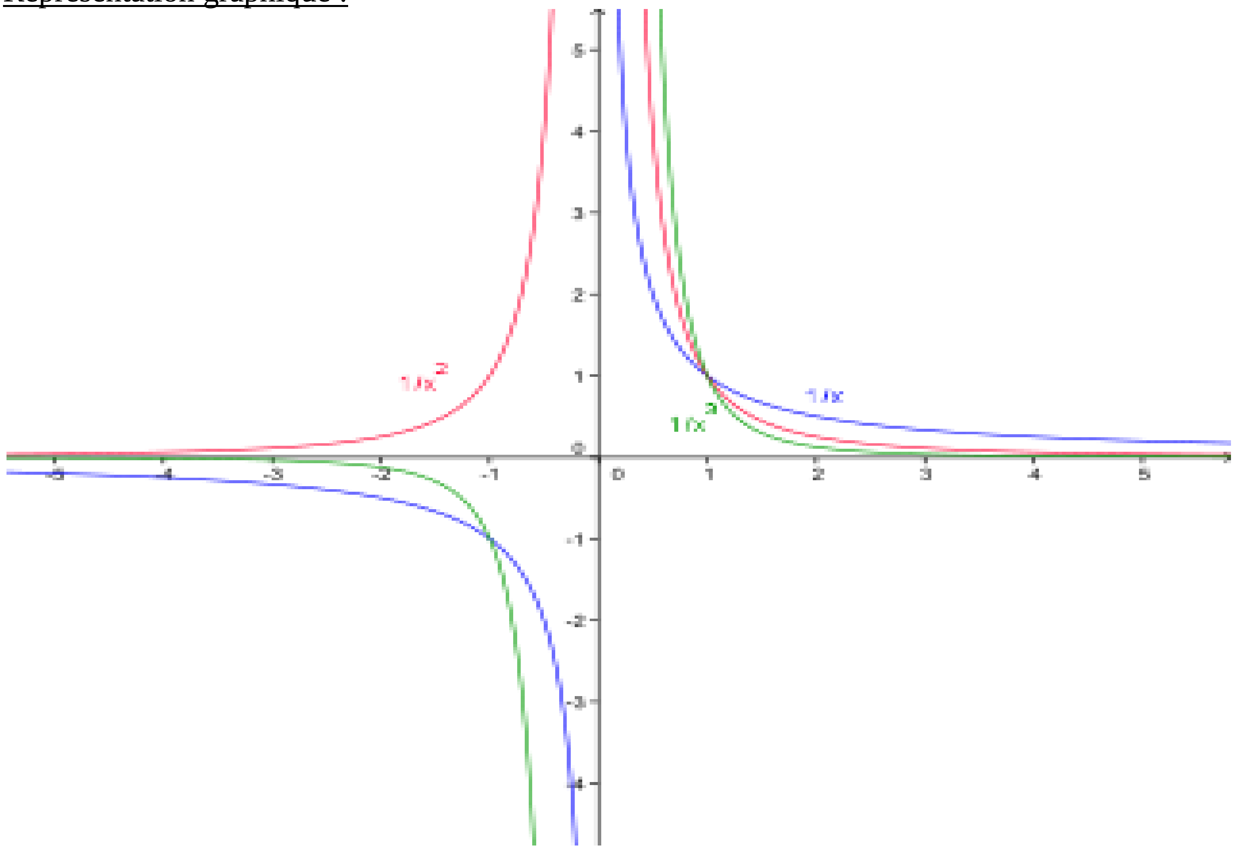
Leur limite en $+\infty$ est toujours $+\infty$, et leur valeur en 0 est toujours 0. Pour un exposant >1, la courbe possède, en $+\infty$ *et en* $-\infty$, une branche parabolique d'axe (Oy).

2) **L'exposant est un entier négatif :**

Domaine de définition : $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

Dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$

Représentation graphique :



Fonctions puissances pour un exposant de - 1 (en bleu : hyperbole), - 2 (rouge), - 3 (vert).

Remarque :

- Si n pair : la fonction $f(x) = x^{-n}$ est paire : f(-x) = f(x) (symétrie axiale)
- Si n impair : la fonction $f(x) = x^{-n}$ est impaire : f(-x) = - f(x) (symétrie centrale)

Croissance ou décroissance de $f(x) = x^{-n}$ (l'exposant est un entier négatif) :

Sur $]0;\ +\infty[$, fonctions strictement décroissantes.

Sur$]-\infty;0[$, distinguer le cas des exposants pairs non nuls pour lesquels la fonction est strictement croissante, et le cas des exposants impair, pour lesquels la fonction est strictement décroissante. Si l'exposant est impair et différent de 1, la courbe possède un point d'inflexion à l'origine.

Limites :

Leur limite en $+\infty$ est toujours 0 et leur limite en 0 par valeurs **positives** est toujours $+\infty$.
La courbe possède donc deux asymptotes d'équation x=0 et y=0.

3) Racine n-ième :

La réciproque de la fonction $f(x) = x^n$ (avec n entier naturel non nul) s'appelle la racine nième et peut s'écrire sous forme de puissance :

f(x) =$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

Domaine de définition : f(x) =$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ définie sur $\mathbb{R}$ si n est impair, sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair.

Dérivable sur son ensemble de définition privé de 0 : non dérivable en 0 car la courbe a pour tangente en ce point l'axe des ordonnées.

Au total : dérivable sur $\mathbb{R}^*$si n est impair, sur $\mathbb{R}_+^*$ si n est pair.

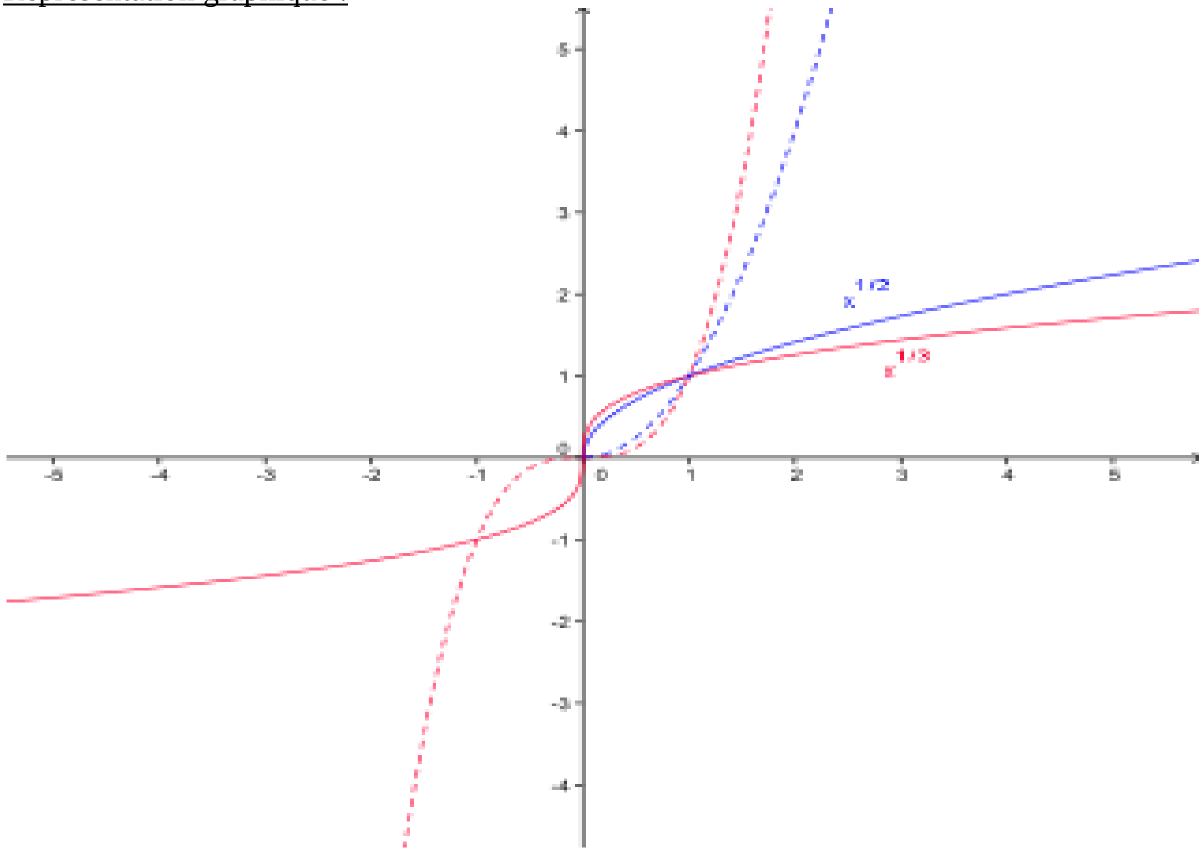
Croissance de $f(x) = x^n$ (avec n entier naturel non nul) :

Fonction strictement croissante sur son domaine de définition ($\mathbb{R}$ si n est impair, sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair)

Limites :

La limite de $f(x) = x^{1/n}$ en $+\infty$ est toujours $+\infty$ mais la courbe de la fonction est tournée vers l'axe des abscisses : branche parabolique d'axe Ox.

Représentation graphique :



Fonctions $f(x) = x^{1/n}$ pour un exposant 1/2 (en bleu), 1/3(en rouge).

Fonctions $f(x) = x^n$ pour un exposant 2 (en pointillés bleus), 3 (en pointillés rouges).

La courbe représentative de $f(x) = x^{1/n}$ est symétrique à celle de $f(x) = x^n$ par rapport à la droite d'équation y=x.

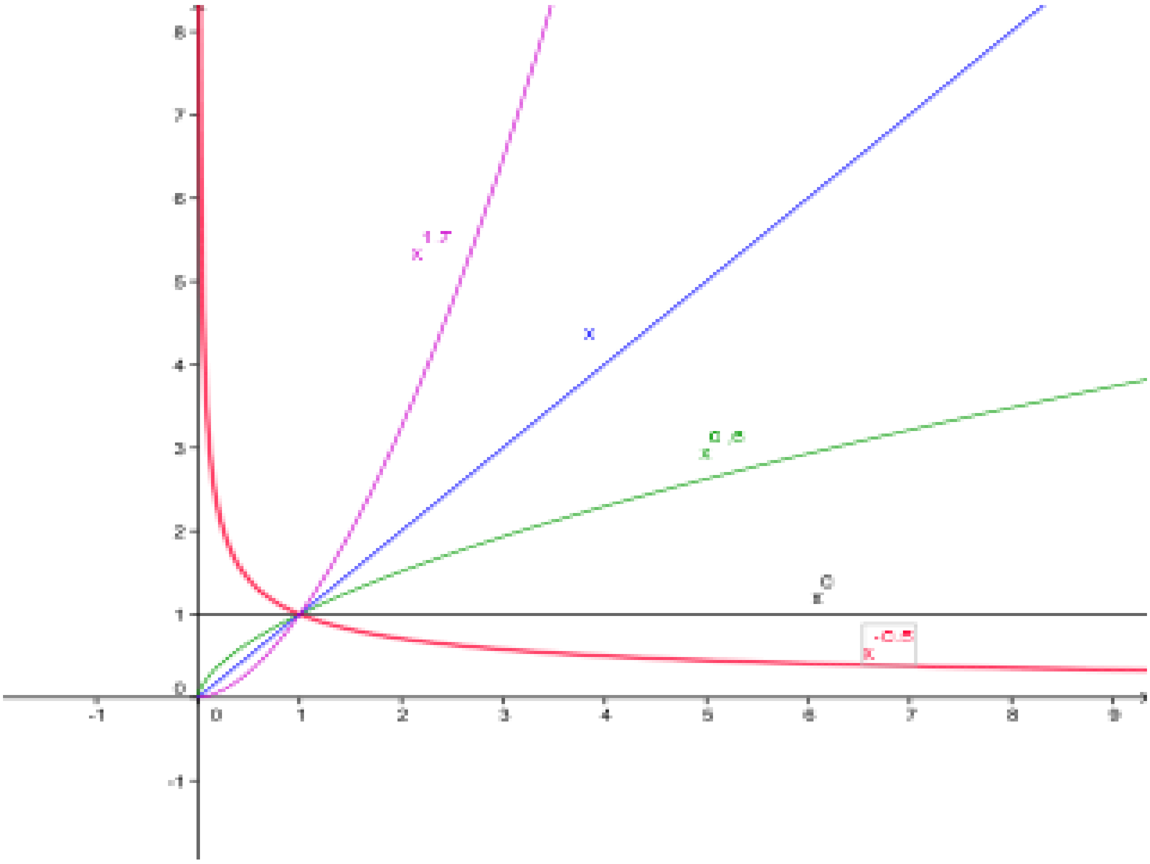
4) Exposant réel :

Grâce aux fonctions exponentielle et logarithme, on peut généraliser les fonctions puissances à tout exposant a réel. Pour tout réel x strictement positif, la fonction f_a est alors définie par:

$$f_a(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$$

Remarque : La convexité d'une fonction est liée au signe de sa dérivée seconde. La convexité d'une fonction puissance est donc liée au signe de a(a-1).

<u>Représentation graphique :</u>



Fonctions puissances pour un exposant -0,5 (rouge), 0 (noir), 0,6 (vert), 1(bleu), 1,7 (violet).