Chapitre 2 : Famille de vecteurs et sous espace

3 Résolution de système : Méthode de Gauss

Pour résoudre des systèmes d'équations, on peut utiliser la méthode de Gauss. Le but de la méthode est de transformer les équations afin d'obtenir un système triangulaire supérieur.

Imaginons le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1p}.x_p = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2p}.x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + ... + a_{np}.x_p = b_n \end{cases}$$

Supposons $a_{11} \neq 0$ (sinon il suffit d'inverser le nom des variables ou d'intervertir l'ordre des lignes).

Il faut faire disparaître la variable x_1 des

lignes suivantes.

Pour cela, on utilise la 1ère ligne comme **pivot**.

On commence par diviser la 1ère ligne par a_{11}.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}.x_2 + ... + \frac{a_{1p}}{a_{11}}.x_p = \frac{b_1}{a_{11}}. \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2p}.x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + ... + a_{np}.x_p = b_n \end{cases}$$

Ensuite, on retranche à la seconde ligne la 1ère multipliée par a_{21}.

Puis on retranche à la troisième ligne la 1ère multipliée par a_{31}.

etc...

Ensuite, on passe à la seconde ligne avec la variable suivante. (On peut intervertir des lignes si cela simplifie le calcul).

Et ainsi de suite...

Plusieurs cas peuvent se présenter pendant la mise sous forme triangulaire :

1) Certaines équations se répètent. Dans ce cas, on peut supprimer les doublons.

2) Une équation est forcément impossible (exemple 1=2). Dans ce cas, on peut immédiatement conclure que le système n'admet pas de solution.

Que faire une fois le système mis sous forme triangulaire ?

1er cas : On a moins d'équations n que d'inconnues p, le système est dit sous-déterminé. Certaines variables vont alors être choisies comme paramètres. Généralement, on choisit les n-p dernières variables comme paramètres et on exprime les autres en fonction des paramètres. La solution n'est pas unique, il s'agit d'un sous-espace affine (un sous-espace vectoriel + un vecteur non nul).

2ème cas : On a autant d'équations que d'inconnues. La solution est alors unique. On détermine

la dernière variable avec la dernière équation puis on remonte dans l'équation précédente et on détermine ainsi l'avant dernière variable jusqu'à déterminer toutes les variables.

3ème cas : On a plus d'équations que d'inconnues, le système est dit sur-déterminé. Alors forcément certaines équations sont soit répétées soit incompatibles entre elles.

Exemple 6

$$\begin{cases} x+3y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

4 Famille libre et liée de vecteurs

Soit E un K-espace vectoriel et $V_1, V_2, ..., V_p$ des vecteurs de E.

Définition 4.1

p vecteurs de E sont dits ***linéairement***

dépendants *s'il existe p scalaires* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ *non tous nuls tels que :* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i.V_i = \overrightarrow{0}$.

On dit aussi que la famille de vecteurs $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ *est* ***liée***.

Définition 4.2

p vecteurs de E sont dits ***linéairement indépendants*** *si :*

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i.V_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0.$

On dit aussi que la famille de vecteurs $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ *est* ***libre***.

Il est bien évident que ces définitions s'excluent mutuellement, une famille de vecteurs est donc soit libre soit liée.

Exemple 7

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *forment-ils une famille libre ou liée ?*

4.1 Base d'un espace vectoriel

Définition 4.3

On dit que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ *est* ***génératrice*** *si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs i.e. :*

$\forall X \in E : \exists \alpha_1 ... \alpha_p$ *tels que* $X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i.V_i$ *et on note*

$$E = Vect(V_1, V_2, ..., V_p).$$

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i.V_i$ *est appelé décomposition de X.*

On dit aussi que les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ *engendrent E.*

Remarque :

Si p vecteurs engendrent E, alors la famille de vecteurs composée de ces p vecteurs plus n'importe quel vecteur engendre aussi E.

Exemple 8

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *forment-ils une famille génératrice ?*

Définition 4.4

On dit que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ *est une* ***base*** *de* E *si cette famille est libre et génératrice.*

Proposition 4.1

On a équivalence entre :

(i) La famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ *est une base.*

(ii) Tout vecteur se décompose de manière unique sur $V_1, V_2, ..., V_p$.

Exemple 9

Pour $\mathbb{R}^3$, *on peut prendre* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ainsi un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette base est appelée la base canonique.

Théorème 4.1 (Théorème de la base incomplète)

Soient p *vecteurs* $V_1, V_2, ..., V_p$ *qui engendrent* E. *Si* q *d'entre eux forment une famille libre, alors il existe une base de* E *qui contient les* q *vecteurs et qui est incluse dans l'ensemble des vecteurs* $V_1, V_2, ..., V_p$.

4.2 Dimension d'un espace vectoriel

Nous nous intéressons dans ce cours aux espaces vectoriels de dimension finie. On dit qu'un espace est de dimension finie quand il existe un nombre fini de générateurs de E.

Proposition 4.2
Soit E un espace vectoriel, alors toute base de E contient le même nombre de vecteurs.

Puisque toute base contient le même nombre de vecteurs celui-ci est indépendant de la base choisie et on peut donc poser la définition suivante :

Définition 4.5
*On appelle **dimension** de l'espace vectoriel E le nombre de vecteurs de base.*

Définition 4.6
Soit F un sous-espace de E, on appelle base de F une famille de vecteurs de F qui est libre et qui est génératrice de F tout entier.

De même toutes les bases d'un sous-espace F ont le même nombre de vecteurs ce qui nous permet de définir la notion de **dimension** d'un sous-espace vectoriel.

Proposition 4.3
Soit E un espace vectoriel de dimension n alors :

- *n vecteurs indépendants de E sont forcément générateurs et forment donc une base de E.*
- *n vecteurs générateurs de E sont forcément libres et forment donc une base de E.*
- *Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension $p \leq n$.*

4.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4.7
*Le **rang** d'une famille de p vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs de la famille qui sont linéairement indépendants.*

Propriétés 4.1

- *Soit p vecteurs, alors leur rang est inférieur ou égal à p.*

— *Dans un espace de dimension n, le rang est inférieur ou égal à n.*
— *Le rang de p vecteurs est égal à la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.*

<u>**Exercice :**</u>
Quel est le rang de la famille
$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}?$$

Proposition 4.4
Soit p vecteurs d'un espace E de dimension n alors :
— *La famille de vecteurs est libre ssi son rang est égal à p.*
— *La famille de vecteurs est génératrice ssi son rang est égal à n.*
— *La famille de vecteurs est une base ssi son rang est égal à p et à n.*

Le calcul du rang pour lequel nous verrons une méthode utilisant le déterminant d'une matrice fournit donc une méthode rapide pour savoir si une famille est libre ou génératrice.

5 Caractérisation des sous-espaces

Un sous-espace vectoriel de dimension 1 correspond à une droite passant par l'origine.

Un sous-espace vectoriel de dimension 2 correspond à un plan passant par l'origine.

Un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ dans un espace de dimension n s'appelle un hyperplan.

Un hyperplan est caractérisé par une équation linéaire.

Il faut retenir que dans un espace vectoriel de dimension n un sous-espace de dimension p est caractérisé par l'intersection de $n-p$ hyperplans. Autrement dit il faut $n-p$ équations linéaires (libres entre elles) pour définir ce sous-espace.

Réciproquement dans un espace de dimension n la donnée de p équations linéaires (libres entre elles), vérifiées simultanément, définit un sous espace vectoriel de dimension $n - p$.

Pour définir un sous-espace vectoriel, on peut soit utiliser un système d'équation ce qui définit une intersection d'hyperplans, soit définir une base de ce sous espace vectoriel.

<u>Explication :</u>

Soit dans $\mathbb{R}^3$ l'hyperplan E suivant :
$3x + 2y + z = 0$.
En fait, il s'agit des vecteurs (x, y, z) tel que :
$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0$.

Il s'agit donc de l'ensemble des vecteurs or-

thogonaux à $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une autre façon de déterminer ce sous-espace est de résoudre le système :

$$3x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{Donc } E = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On peut aussi écrire

$$E = \left\{ y. \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \mid \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= Vect\left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Autrement dit, il s'agit des combinaisons linéaires des vecteurs $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

C'est donc le plan dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une base de ce sous-espace est donc $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que, par construction, ces vecteurs doivent être libres.

Exemple 10

Trouvez une base du sous-espace suivant :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}.$$

6 Sous-espace affine

On appelle système d'équations affines, un système linéaire où le terme constant est non nul (à droite des égalités).

Un sous-espace affine est l'ensemble des points qui vérifient un système d'équations affines.

On peut remarquer que si l'on connaît un vecteur solution du système affine alors en ajoutant un élément du sous-espace vectoriel (associé au système linéaire) on obtient une autre solution du système affine. Réciproquement, soit W une solution particulière du système affine alors pour toute solution Y du sous espace affine il existe X une solution du système linéaire tel que $Y = W + X$.

Graphiquement un sous-espace affine correspond donc à la translation d'un sous-espace vectoriel par un vecteur qui correspond à une solution particulière du système affine.

Exemple 11 de sous espace affine :

Représentez le sous espace affine suivant : $x - y + 2z = 2$.