UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE - UFR de GESTION

TD-3
Application linéaire
Licence 1ère année

Exercice 1:

(i) $f_1(x,y,z) = (x+y-z)$

a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Soit (x,y,z) et (x',y',z') et soit a et b deux réels

$f_1(a(x,y,z) + b(x',y',z')) = f_1(ax+bx', ay+by', az+bz')$

$= (ax+bx'+ay+by'-(az+bz')) = a.(x+y-z) + b.(x'+y'-z')$

$= a\ f_1(x,y,z) + b\ f_1(x',y',z')$ donc effectivement f_1 est linéaire.

On aurait pu remarquer que f_1 était un vecteur dont les composantes ne faisait intervenir que des termes "¡linéaires"¿ par rapport aux variables (des termes de degré 1).

b) $(x,y,z) \in Ker\ f_1$ ssi $f_1(x,y,z) = (x+y-z) = (0)$ On obtient donc l'équation $x+y-z=0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$ donc $Ker\ f_1 = \left\{(-y+z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = y.(-1,1,0)+z(1,0,1)$.

Une base du noyau est donc $(-1,1,0)$ et $(1,0,1)$; le noyau est de dimension 2 c'est un plan de $\mathbb{R}^3$.

c) On peut déterminer le rang directement en regardant le rang de la famille de vecteurs des images de base.

$f_1(1,0,0) = (1)$; $f_2(0,1,0) = (1)$; $f_3(0,0,1) = (-1)$ De plus la famille de vecteurs $(1),(1),(-1)$ est bien sur de rang 1 puisque par exemple le premier vecteur est non nul et qu'il s'agit de vecteur de $\mathbb{R}$.

On peut aussi utiliser le théorème des dimensions.

$dim\ E = Rang\ f + dim\ Ker\ f$. Donc $Rang\ f = dim\ E - dim\ Ker\ f = 3-2 = 1$.

d) $Ker\ f \neq \overrightarrow{0}$ donc f n'est pas injective.
$dim\ F = dim\ \mathbb{R} = 1 = Rang\ f$ donc f est surjective.
f n'étant pas injective, elle n'est pas bijective.

e) $M = \begin{bmatrix} f_1(1,0,0) & f_2(0,1,0) & f_3(0,0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $f_2(x,y) = (x+y-2)$

a) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ f n'est pas linéaire en effet pour le prouver il suffit de remarquer qu'une condition nécessaire n'est pas remplie: $f_2(0,0) = (-2) \neq (0)$.

Les questions suivantes n'ont pas de sens (à part la d... mais il n'est pas utile de la faire).

(iii) $f_3(x,y,z) = (x+2y-z, 0, z)$

a) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Il est facile de montrer que f_3 est linéaire en appliquant la définition. On peut sinon remarquer que chaque composante est linéaire donc f est linéaire.

b) $(x,y) \in Ker\, f_3$ ssi $\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 0=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2y \\ y=y \\ z=0 \end{array}\right.$

$Ker\, f_3 = \{(-2y,y,0)\,|y \in \mathbb{R}\} = y\,(-2,1,0)\,.$

Une base de Ker f est donc $(-2,1,0)$ et Ker f est de dimension 1 c'est une droite de $\mathbb{R}^3$.

c) Méthode 1:

$f_3\,(1,0,0) = (1,0,0)\,;f_3\,(0,1,0) = (2,0,0)\,;f_3\,(0,0,1) = (-1,0,1)$

Les deux premiers vecteurs sont proportionnels entre eux donc la famille est nécessairement liée et le rang est donc au plus de 2. D'autre part le premier et le 3ème vecteur sont libres entre eux donc le rang est au moins de 2. Finalement, on en conclut que le rang de cette famille est de 2.

Méthode 2:

$Rang\ f = dim\ E - dim\ Ker\ f = 3-1 = 2.$

d) $Ker\ f \neq \overrightarrow{0}$ donc f n'est pas injective.

$dim\ F = dim\ \mathbb{R}^3 = 3 \neq 2 = Rang\ f$ donc f n'est pas surjective.

f n'est donc pas bijective.

e)$M = \left[\begin{array}{ccc} f_3\,(1,0,0) & f_3\,(0,1,0) & f_3\,(0,0,1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \text{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$

(iv) $f_4\,(x,y,z) = \left(2x-y^2,y,0\right).$

a) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

f_4 n'est pas linéaire puisqu'il y a un terme dans la première composante de degré 2. Pour le prouver formellement il suffit de montrer que $f_4\,(a.\,(x,y,z)) \neq a.f_4\,(x,y,z)$ et ceci est le cas à cause du terme en a^2y^2.

(v) $f_5\,(x,y,z) = (x-z, y+2z, x+z, z)\,.$

a) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

Il est facile de montrer que f_5 est linéaire en appliquant la définition. On peut sinon remarquer que chaque composante est linéaire donc f est linéaire.

b) $(x,y,z) \in Ker\ f_5$ ssi $\left\{\begin{array}{l} x-z=0 \\ y+2z=0 \\ x+z=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right.$

Donc $Ker\ f_5 = \overrightarrow{0}$ et la dimension du noyau est zéro.

c)Méthode 1:

$f_5\,(1,0,0) = (1,0,1,0)\,;f_5\,(0,1,0) = (0,1,0,0)\,;f_5\,(0,0,1) = (-1,2,1,1)$

Cette famille est-elle libre?

$a.(1,0,1,0)+b.(0,1,0,0)+c.(-1,2,1,1)$
$=(a-c,b+2c,a+c,c)=(0,0,0,0)$ d'après la question b) ce système implique $a=b=c=0$ ce qui prouve que la famille est libre donc le rang est de 3.

Méthode 2:

$Rang\ f_5 = dim\ E - dim\ Ker\ f_5 = 3-0=3.$

d) $Ker\ f_5 = \overrightarrow{0}$ donc f_5 est injective.

$Rang\ f_5 = 3 \neq dimF = 4$ donc f_5 n'est pas surjective.

f_5 n'étant pas surjective, elle n'est pas bijective.

e) $M = \left[\begin{array}{ccc} f_5(1,0,0) & f_5(0,1,0) & f_5(0,0,1)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right].$

(vi) $f_6(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$.

a) $f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Il est facile de montrer que f_6 est linéaire en appliquant la définition. On peut sinon, remarquer que chaque composante est linéaire donc f est linéaire.

b) $(x,y,z) \in Ker\, f_6$ ssi $\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ -y+z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 2z=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0\end{array}\right.$ donc $Ker\ , f_6 = \overrightarrow{0}$ et la dimension du noyau est zéro.

c)Méthode 1:

$f_6(1,0,0) = (1,0,1)\,; f_6(0,1,0) = (1,1,0)\,; f_6(0,0,1) = (0,1,1)$.

Cette famille est-elle libre?

$a.(1,0,1)+b.(1,1,0)+c.(0,1,1) = (a+b, b+c, a+c) = (0,0,0,0)$ d'après la question b) ce système implique $a=b=c=0$ ce qui prouve que la famille est libre donc le rang est de 3.

Méthode 2:

$Rang\ f_6 = dim\mathbb{E} - dim\ Ker\ f_6 = 3-0=3$

d) $Ker\ f_6 = \overrightarrow{0}$ donc f_6 est injective.

$Rang\ f_6 = 3 = dim\ F$ donc f_6 est surjective.

f_6 étant injective et surjective elle est bijective.

e) $M = \left[\begin{array}{ccc} f_6(1,0,0) & f_6(0,1,0) & f_6(0,0,1)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1\end{array}\right].$

Exercice 2:

(i) $M_1 = [3]$ donc $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de plus $f_1(x) = 3x$.

(ii) $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & \text{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ donc $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et de plus $f_2(x, y) = M_2. \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \text{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{2x-y} \\ \text{x} \end{pmatrix}$.

Finalement, $f_2(x, y) = (2x - y, x)$.

(iii) $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ donc $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et de plus $f_3(x, y, z) = M_3. \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{2x+y+3z} \\ \text{y+2z} \end{pmatrix}$.

Finalement, $f_3(x, y, z) = (2x + y + 3z, y + 2z)$.

Exercice 3:

Soit $f(x, y, z) = (z, -z, x + y + z)$

1°)

Soit $(x, y, z) \in Ker\, f$ alors $\begin{cases} z = 0 \\ -z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$

$Ker\ f = \{(-y, y, 0) \,|y \in \mathbb{R}\} = y.(-1, 1, 0)$ Ker f est donc une droite il est engendré par le vecteur $(-1, 1, 0)$.

Cherchons une base de Im f: Im f est l'espace engendré par les images de f, ceci correspond donc à l'espace engendré par les images d'une base.

$f(1, 0, 0) = (0, 0, 1)\, ; f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)\, ; f(0, 0, 1) = (1, -1, 1)$

Les deux premiers vecteurs sont les mêmes donc Im f est engendré par $(0, 0, 1)$ et $(1, -1, 1)$, or ces vecteurs sont libres car non proportionnels donc ils forment une base de $Im\ f$.

2°) Pour montrer que $Ker\, f \subseteq Im\ f$ il suffit de montrer que le vecteur engendrant $Ker\ f$ est dans l'image de f. Or

$(-1, 1, 0) = -1.(1, -1, 1) + 1.(0, 0, 1)$ il appartient donc bien à Imf.

3°) Comme Im f est de dimension 2 le rang de f vaut 2. D'autre part le noyau a pour dimension 1 donc on contrôle bien notre résultat grace au théorème des dimensions. $Dim\ E = 3 = Rang\ f + dim\ Ker\ f = 2 + 1$ OK!!

Comme $dimF = 3 \neq 2 = Rang\ f$ f n'est pas surjective.

D'autre part Ker f n'est pas restreint au vecteur nul donc f n'est pas injective.

Finalement, f n'est donc pas bijective.

4°) $f(x, y, z) = (z, -z, x + y + z)$ donc $f^2(x, y, z) = f(z, -z, x + y + z)$

$= (x + y + z, -(x + y + z), z + -z + x + y + z)$

donc $f^2(x, y, z) = (x + y + z, -x - y - z, x + y + z)$

$f^3(x, y, z) = f(x + y + z, -x - y - z, x + y + z)$

$= (x + y + z, -(x + y + z), x + y + z - x - y - z + x + y + z)$

donc $f^3(x, y, z) = (x + y + z, -x - y - z, x + y + z)$

On en déduit que $\forall n \geq 2 : f^n = f^2$.

Preuve: Récurrence

$n = 3$: C.f. précédemment.

$n \rightsquigarrow n + 1$: supposons $f^n = f^2$ alors $f^{n+1} = f(f^n) = f(f^2) = f^3 = f^2$ d'après précedemment. CQFD.

5°) Montrons que V_1, V_2, V_3 constituent une famille libre.

Supposons $aV_1 + bV_2 + cV_3 = \overrightarrow{0}$ alors on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -a - b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ -c = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre or une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement génératrice. Donc V_1, V_2, V_3 est une base.

6°) $(z, -z, x+y+z)$

$f(V_1) = f(1,-1,1) = (1,-1,1) = V_1$

$f(V_2) = f(1,-1,0) = (0,0,0) = \overrightarrow{0}$

$f(V_3) = f(-1,0,1) = (1,-1,0) = V_2$

7°) $V = xV_1 + yV_2 + zV_3$

Donc par linéarité on a: $f(V) = f(xV_1 + yV_2 + zV_3) = xf(V_1) + yf(V_2) + zf(V_3) = xV_1 + zV_2$

Donc $f^2(V) = f(xV_1 + zV_2) = xf(V_1) + zf(V_2) = xV_1$

Or comme $f(V_1) = V_1$ on en déduit immédiatement que $\forall n \geq 2 : f^n(V) = f^2(V) = xV_1$.

Ce résulat confirme le fait que $\forall n \geq 2 : f^n = f^2$ (il est même plus précis).

8°) Calculons l'image des vecteurs de la base canonique:

$f(1,0,0) = (0,0,1)\,; f(0,1,0) = (0,0,1)\,; f(0,0,1) = (1,-1,1)$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

9°) Calculons l'image des vecteurs de la base:

$f(V_1) = (1,-1,1)\,; f(V_2) = (0,0,0)\,; f(V_3) = (1,-1,0)$

$$B = \left[\begin{array}{ccc} f(V_1) & f(V_2) & f(V_3) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

10°) Il faut trouver les coordonnées des images de la base canonique dans la base V_1, V_2, V_3 :

$f(1,0,0) = (0,0,1) = a.V_1 + b.V_2 + c.V_3$ On pourrait résoudre le système mais un peu d'observation nous donne bien sûr:

$(0,0,1) = (1,-1,1) - (1,-1,0) = 1.V_1 - 1.V_2 + 0.V_3$

De même pour $f(0,1,0) = 1.V_1 - 1.V_2 + 0.V_3$.

$f(0,0,1) = (1,-1,1) = V_1$ ainsi:

$$C = \left[\begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

11°) Décomposons les images de V_1, V_2, V_3 dans la base V_1, V_2, V_3 :

$f(V_1) = 1.V_1 + 0.V_2 + 0.V_3; f(V_2) = 0.V_1 + 0.V_2 + 0.V_3; f(V_3) = 0.V_1 + 1.V_2 + 0.V_3$

$$D = \left[\begin{array}{ccc} f(V_1) & f(V_2) & f(V_3) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Remarque: il est important de noter que la représentation dépend complètement des bases choisies. Généralement on précise ses bases au départ et à l'arrivée car lorsque rien n'est précisé cela veut dire que l'on utilise les bases canoniques.