Compléments sur le chapitre 2 : Famille de vecteurs et sous-espace

Exemple 6 :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 & L1 \\ 2x + y - z = 1 & L2 \\ x - y - z = 1 & L3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y + z = 2 & L1 \\ -5y - 3z = -3 & L2 - 2L1 \\ -4y - 2z = -1 & L3 - L1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y + z = 2 & L1 \\ y + \frac{3}{5} z = \frac{3}{5} & \frac{L2}{-5} \\ -4y - 2z = -1 & L3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y + z = 2 & L1 \\ y + \frac{3}{5} z = \frac{3}{5} & L2 \\ \frac{2}{5} z = \frac{7}{5} & L3 + 4L2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 - 3y - z = 2 - 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} = 3 \\ y = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} z = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

La solution est donc $(x ; y ; z) = \left(3 ; -\frac{3}{2} ; \frac{7}{2}\right)$.

Exemple 7 :

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ / $\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ 5\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est donc libre.

Exemple 8 :

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $\exists ?\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ / $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha_2 \\ x_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -x_1 \in \mathbb{R} \text{ (car } x_1 \in \mathbb{R} \text{ par hyp.)} \\ \alpha_1 = x_2 - \alpha_2 = x_2 + x_1 \in \mathbb{R} \text{ (car } x_1 \text{ et } x_2 \in \mathbb{R} \text{ par hyp)} \end{cases}$

Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ se décompose sur la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et la famille est bien génératrice.

Autre méthode : Vérifions si la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre.

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ / $\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$ donc la famille $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est libre. Comme elle contient 2 vecteurs libres de $\mathbb{R}^2$, elle génère un sev de dimension 2 et par conséquent $\mathbb{R}^2$ tout entier. La famille est donc génératrice.

Remarque : Soit E un ev de dimension n et soient $V_1, V_2, \dots, V_p$ p vecteurs de E.

1/ Si $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ engendre E alors $p \geq n$ et si $p = n$ alors $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ est une famille libre.

2/ Si $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ est une famille libre dans E alors $p \leq n$ et si $p = n$ alors $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ engendre E

Conséquence immédiate :

1/ si $p < n$ alors $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ n'engendre pas E

2/ si $p > n$ alors $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ n'est pas une famille libre.

Démonstration de la Proposition 4.1 :

1/. Soit $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ une base de E et $x \in E$.

. Comme $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ est génératrice, x peut s'écrire comme combinaison linéaire des V_i, $i=1,\dots,p$ et donc

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall i=1,\dots,p.$$

. Soient $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ / $x = \sum_{i=1}^{p} \beta_i V_i$ alors

$$\vec{0} = x - x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i V_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - \beta_i) \cdot V_i$$

Or $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ est libre donc $\alpha_i - \beta_i = \vec{0}$ $\forall i=1,\dots,p$

$\Leftrightarrow$ $\alpha_i = \beta_i$ $\forall i=1,\dots,p$.

Ainsi, si $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ est une base de E alors la combinaison linéaire qui exprime x est unique.

2/ Réciproquement, si tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire de façon unique $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i$ alors $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ engendre E par définition (ou est génératrice).

De plus, $x = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i = \vec{0}$ (par unicité de l'écriture

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ c'est-à-dire $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ libre.

Ainsi, $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ est une base de E.

$\boxtimes$

Démonstration du théorème 4.1 : NON

. On suppose que $A := \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ engendre E et que $B := \{V_1, V_2, \dots, V_q\}$ avec $q \leq p$ est une famille libre.

. Soit C une famille telle que $B \subset C \subset A$ et telle que C ait le plus grand nombre possible de vecteurs linéairements indépendants. (C existe, il suffit de prendre par exemple $B = C$).

. Soit $x \in A$ et $x \notin C$ alors les vecteurs de $C \cup \{x\}$ ne sont pas linéairement indépendants (sinon C n'aurait pas le plus grand nombre possible d'éléments linéairement indépendants) donc x est combinaison linéaire des éléments de C. (En effet, soient $x_1, \dots, x_n$ les vecteurs de C et considérons $\alpha x + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Comme $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants et $x, x_1, \dots, x_n$ ne le sont pas, on a $\alpha \neq 0$ donc $x = -\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n$.)

Ainsi, tout élément de A est combinaison linéaire des éléments de C et par suite, tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de C donc C est génératrice. De plus, par hypothèse C est une famille libre donc C est une base de E. $\square$

Démonstration de la Proposition 4.2: NON

. Soit $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de E et soit $B = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ une autre base de E. Comme B est une base, B engendre E donc d'après la remarque précédente $p \geq n$. De plus, comme B est une base, B est libre donc d'après la même remarque $p \leq n$.

Ainsi, on a $p \geq n$ et $p \leq n$ c'est-à-dire $p = n$ $\square$

Exercice :

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ / $\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & \overset{(2)}{\Rightarrow} \alpha_2 = -\frac{3}{2}\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & \overset{(3)}{\Rightarrow} -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_3 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_2 \end{cases}$$

D'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre, son rang $= 3$. $\square$

Exemple 10 :

Soit $E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z=0 \text{ et } 2x+y+2z=0 \right\}$

$$\begin{cases} x+y-z=0 & (1) \\ 2x+y+2z=0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow -x-3z=0 \Leftrightarrow x=-3z$

$(1) \Rightarrow -3z+y-z=0 \Leftrightarrow y=4z$

D'où $E = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} \,/\, z \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \,/\, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

D'où $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un système générateur de E (i.e. $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre E)

- De plus, soit $\alpha \in \mathbb{R} \,/\, \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha = 0 \\ 4\alpha = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0$$

D'où $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un système libre, par suite $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E (et $\dim E = 1$ = nombre de vecteurs de la base).

Exemple 11 de sous-espace affine :

$$x-y+2z=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+y-2z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y+2z=2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \,/\, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;/\; (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Graphiquement, il s'agit du plan passant par le point $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan passant par l'origine et de directions les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.