CHAPITRE 2 : LIMITES ET CONTINUITE DE FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

1. Limites :

1.1. Notion de limite et définitions :

1.1.1. Limite en un point x_0 de $\mathbb{R}$:

Soit une fonction f définie sur un ensemble E qui est un intervalle ou une réunion de deux intervalles tels que l'union de E et de x_0 soit un intervalle.

Exemples :

$E =]0 ; 1]$ et $x_0 = 0$

$E = [-1 ; +\infty[$ et $x_0 = -1$

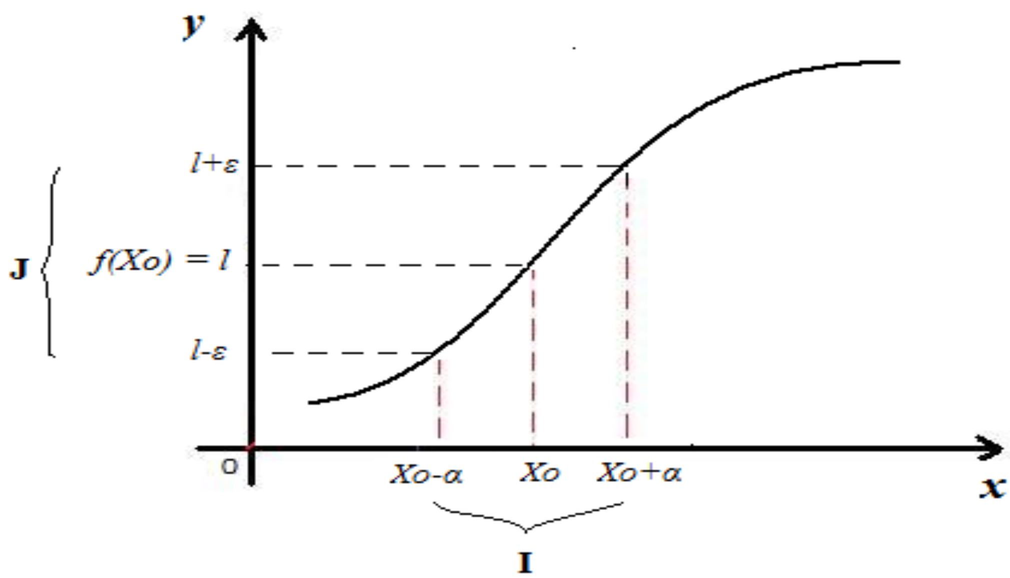
La fonction f admet une limite l lorsque x tend vers x_0 si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall x \in E, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Cette formulation mathématique peut se traduire comme ceci : « on peut choisir un intervalle [l-ε ; l+ε] autour de l aussi petit que l'on veut, on pourra toujours trouver un intervalle autour de x_0 dont l'image par f est incluse dans [l-ε ; l+ε]. Autrement dit, au fur et à mesure que les valeurs de x tendent vers x_0, les valeurs de f(x) tendent vers l.

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0} f(x) = l$

Illustration graphique :



Exemple :

$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+3} = 0$

On a de la même manière :

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in$ E, $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$
Les valeurs de f(x) « croissent de plus en plus » quand x tend vers x_0

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in$ E, $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$
Les valeurs de f(x) « diminuent de plus en plus » quand x tend vers x_0

Ex : $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

La limite en un point x_0 peut donc être finie ($= l$) ou infinie (= +∞ ou $-\infty$).

1.1.2. Limite à droite, limite à gauche :

Si **x_0 est exclus de E** (fonction non définie en x_0)

A toute valeur différente de x_0 correspond une valeur de y.

A fur et à mesure que les valeurs de x tendent vers x_0, les valeurs prisent par y= f(x) tendent vers une certaine valeur, appelée limite de f(x) quand x tend vers 0.

Exemple :

E =]1 ;3[$-$ {2} et x_0 = 2

La limite de f(x) quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures est notée $\lim_{x\to x_{0-}} f(x)$

La limite de f(x) quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures est notée $\lim_{x\to x_{0+}} f(x)$

Si les deux limites sont être différentes : $\lim_{x\to x_{0-}} f(x) \neq \lim_{x\to x_{0+}} f(x)$

Exemple avec graphique:

$f(x)=\frac{1}{x}$. La limite de $f(x)$ en 0^+ est différente de celle en 0^-.

$\lim_{x\to x_{0-}} f(x) = ?$ $\lim_{x\to x_{0+}} f(x) = ?$

Si $\lim_{x\to x_{0-}} f(x) = \lim_{x\to x_{0-}} f(x)$, alors ces deux limites valent $\lim_{x\to x_0} f(x)$

La limite en x_{0-} ou x_{0+} peut être finie ($= l$) ou infinie (= +∞ ou $-\infty$).l

1.1.3. Limite en +∞ :

Soit f une fonction définie sur E =]a ;+∞[avec a ∈ ℝ

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists B \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in$ E, x $> B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Autrement dit, au fur et à mesure que x croît, les valeurs de f(x) tendent vers *l*.

On définit de manière similaire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(La limite en +∞ peut être finie ($= l$) ou infinie (= +∞ ou $-\infty$))

Exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$?

1.1.4. Limite en -∞ :

Soit f une fonction définie sur E =]-∞ ; a[avec a ∈ ℝ

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists B \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in$ E, x $< -$B $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Autrement dit, au fur et à mesure que x décroît, les valeurs de f(x) tendent vers *l*.

On définit de manière similaire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(La limite en +∞ peut être finie ($= l$) ou infinie (= +∞ ou $-\infty$))

1.2. Stabilité des fonctions de limites en 0, +∞ ou -∞ :

Soient f et g deux fonctions définies sur E :

1. Si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} g = 0$, alors $\lim\limits_{x_0}(f + g) = 0$
2. Si $\lim\limits_{x_0} f = 0$ et si g est bornée, alors $\lim\limits_{x_0} fg = 0$
3. Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ (resp. -∞) et si g est bornée, alors $\lim\limits_{x_0}(f + g) = +\infty$ (resp. -∞)
4. Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ (resp. -∞) et si g admet un minorant strictement positif, alors $\lim\limits_{x_0} fg = +\infty$ (resp. -∞)

1.3. Opérations sur les limites :

On considère deux fonctions f et g définies sur E. Soient l et m deux réels positifs. Dressons un tableau donnant les limites de (f+g), f.g et f/g en selon les limites de f et g.

lim f	lim g	lim (f+g)	lim f.g	lim f/g
l	m	l+m	l.m	l/m
l	0	l	0	+∞
l	+∞	+∞	+∞	0
0	0	0	0	FI
0	+∞	+∞	FI	0
+∞	0	+∞	FI	+∞
+∞	+∞	+∞	+∞	FI
+∞	m	+∞	+∞	+∞
+∞	-∞	FI*	-∞	FI

*FI = forme indéterminée

Exemple :

$\lim\limits_{x\to 0_+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0_+} x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Attention à la « règle des signes » qui s'applique : « + » × « + » donne « + » ;

« - » × « - » donne « + » ; « + » × « - » donne « - » , « + » / « - » donne « - » ….

Exemple :

On considère deux fonctions f et g définies sur E. Soient l et m deux réels positifs.

lim f = l *et* lim $g = -\infty$, on a: $\lim(\mathrm{f}+\mathrm{g}) = -\infty$, $\lim \mathrm{f.g} = -\infty$, $\lim\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}} = 0$.

(l peut aussi être négatif)

Attention aux fonctions « dominantes » ou « dominées » :

quand x tend vers +∞ ou -∞, la fonction f(x)= e^{x} domine sur la fonction f(x)=x^{a} qui domine elle-même sur la fonction f(x)= ln(x)

Exemple :

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, on n'a pas une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$

De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Récapitulatif des FI : $+\infty - \infty$; $0 \times (\pm\infty)$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\frac{0}{0}$

1.4. Composition de limites :

Soient f et g deux fonctions respectivement définies sur E et F, tels que l'intervalle d'arrivée de f (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de f(x) pour x décrivant E) soit inclus dans F. Considérons également que $x_0 \in E$ et $l \in F$. On peut former la fonction composée de f et g :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$
$$x \to f(x) \to gof(x) = g(f(x))$$

Si $\lim\limits_{x_0} f = l$ et $\lim\limits_{l} g = m$, alors $\lim\limits_{x_0} gof = m$

Exercice 1 : Application à l'étude des fonctions rationnelles, calcul de P(x)/Q(x) qd x→ +∞

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+x^6}{x+3x^6-x^3} = ?$

Conseil : on ordonne selon les puissances décroissantes de P(x) et de Q(x) puis on factorise par le terme de plus haut degré.

Exercice 2 : trouver les limites en +∞ des fonctions suivantes :

$x \mapsto xe^x$ $\quad\quad$ $x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$

2. Continuité :

2.1. Définition :

2.1.1. Continuité en un point x_0 de $\mathbb{R}$:

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2.1.2. Continuité sur un intervalle :

La fonction f est continue sur un intervalle si et seulement si elle est continue en tout point de cet intervalle.

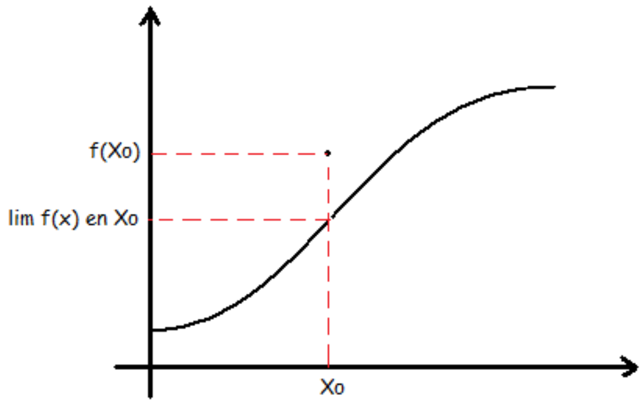
2.1.3. Continuité à droite, continuité à gauche :

La fonction f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0)$, à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0)$.

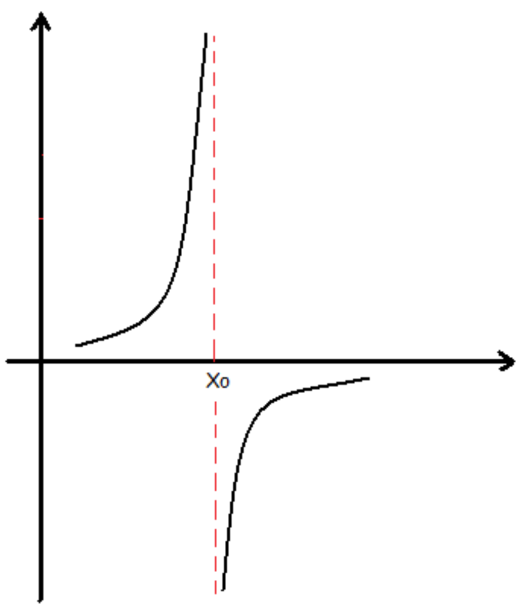
2.2. Conséquences :

Lorsqu'une fonction est définie sur un intervalle ouvert I comprenant x_0 mais qu'elle n'est pas continue en x_0, on dit que x_0 est un *point de discontinuité*.

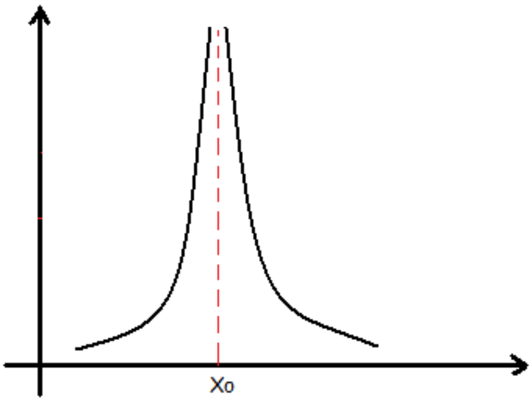
Illustrations :



f tend vers une valeur différente de $f(x_0)$ quand x tend vers x_0.



f(x) croît ou décroît indéfiniment lorsque x tend vers x_0 par valeurs inférieures ou supérieures.



f(x) croît indéfiniment lorsque x tend vers x_0 par valeurs inférieures ou supérieures.

2.3. Opérations :

Théorème :

Soient deux fonctions f et g continues en x_0 et un nombre réel λ.

1) *Les fonctions f+g, λf et fg sont continues en x_0.*
2) *Si de plus g(x)≠0, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0.*

Corollaire :

1) Toute fonction polynôme est continue en tout point de ℝ.
2) Toute fonction rationnelle est continue en tout point où elle est définie.

2.4. Composition d'une fonction ayant une limite L (L∈ ℝ) par une fonction continue en L :

Théorème :

Soit x_0 un élément de ℝ ∪ {-∞ ;+∞}, l un élément de ℝ, et les applications :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *et si g est continue en l, alors* $\lim_{x \to x_0} fog(x) = g(l)$

Corollaire :

Si f est une fonction continue en x_0 et si g est une fonction continue en $f(x_0)$, alors la fonction gof est continue en x_0.

2.5. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle :

2.5.1. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème 1 : *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème 2 : *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Exemple :

D = [1 ;3] et f est définie par $\begin{cases} si\ 1 \leq x < 2, f(x) = 2x \\ si\ 2 \leq x \leq 3, f(x) = -3x + 10 \end{cases}$

Montrer que f(D) est un segment.

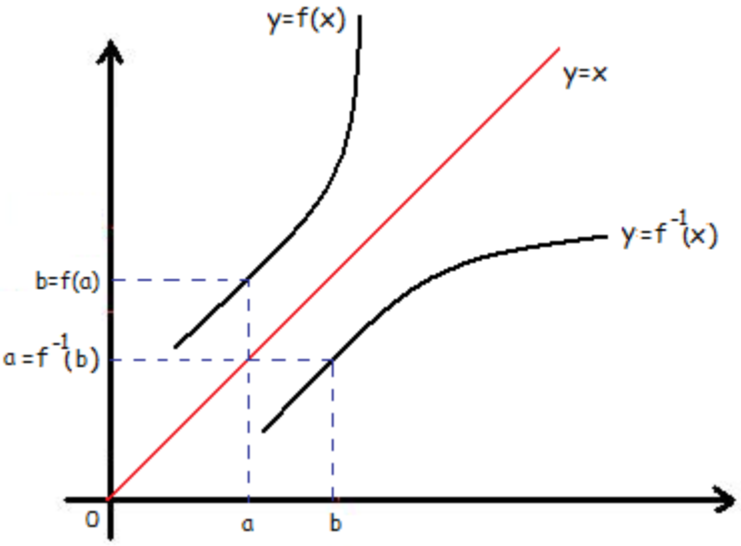
2.5.1. Cas où la fonction f est continue et strictement monotone sur I :

Théorème fondamental :

Si f *est continue et strictement monotone sur un intervalle I,*

- f *est une bijection de I sur l'intervalle f(I)*
- f^{-1} *est une bijection de f(I) sur I, continue et variant dans le même sens que* f,
- *dans un repère orthonormé, les représentations graphiques de* f *et* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.*

Illustration graphique :



2.6. Prolongement par continuité en un point :

Si une fonction n'est pas définie en 1 point x_0, mais $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = l$, on peut prolonger la fonction par continuité en définissant $f(x_0) = l$.

Avec l = *valeur finie*.

(Cf exercices TD et archétype)