UNIVERSITE PARIS 1 - UFR de GESTION
TD-4
Les matrices
Licence 1ère année

Exercice 1:

Calculer et déterminer le rang de la matrice trouvée:

$i)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad ii)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$

$iii)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad iv)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$

Exercice 2:

Soit $f(x,y,z) = (x+y, 2z, y+z)$ et $g(x,y) = (x+y, x-y, 2y)$.
Déterminer les matrices représentatives de ces 2 applications linéaires.
Calculer directement et à partir des matrices $f(1,2,1)$ et $g(1,1)$.
Calculer ensuite la matrice représentative de l'application $f \circ g$.
Calculer alors directement et à partir de la matrice $f \circ g(1,2)$.

Exercice 3:

Pour chaque matrice:

a) Calculer A^2, A^3 et $f(A)$.
b) Montrer que A est un zéro du polynôme g.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x^2 - 4x - 12$.

ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ et $g(x) = x^2 - x - 8$.

Exercice 4:

i) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec A.

ii) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer par récurrence que $\forall n \in N^*, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5:

Calculer le déterminant des matrices suivantes:

$i)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad ii)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad iii)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 29 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$

UNIVERSITE PARIS 1 - UFR de GESTION
TD-4
Les matrices II
Licence 1ère année

Exercice 6:

Dans cet exercice X_n désigne le déterminant d'une matrice carrée de taille n dont les éléments constitutifs sont donnés. Pour déterminer la valeur, il peut être utile de calculer d'abord X_1, X_2 et (si besoin) X_3 afin d'avoir une idée de la formule générique.

$i)$ Montrer que $A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ pour tout $n \in N$.

$ii)$ Calculer $B_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ en utilisant une récurrence.

$iii)$ Calculer $C_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & \text{n} \end{vmatrix}$.

$iv)$ Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ en utilisant une récurrence.

Exercice 7:

Déterminer le rang des matrices suivantes:

$i) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad iii) \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

Même question en fonction de α cette fois:

$iv) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 2 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad v) \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha - 1 & 3 \\ 3 & 2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$