

## Évaluation d'algèbre

Durée : 40 minutes

Les calculatrices sont interdites

- Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.
- Tout effort de recherche sera pris en compte dans l'appréciation des copies.

**Énoncé :**

**Partie A : (8 points)**

On considère l'application linéaire définie de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}^3$  par :

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, 2y, x - y + 3z).$$

1. Déterminer le noyau de  $f$ ,  $\text{Ker } f$ . En déduire le rang de  $f$ .
2.  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ? justifier chaque réponse.

**Partie B : (8 points)**

Soit  $g$  l'application linéaire définie par :  $g(x, y) = (x + y, x - 2y, x - y)$  et  $f$  l'application définie dans la partie A.

1. Justifier que l'application  $f \circ g$  est linéaire et préciser son ensemble de départ  $E$  et son ensemble d'arrivée  $F$ .
2. Donner la matrice représentative de l'application  $f \circ g$ .
3. Déterminer le rang de la matrice de  $f \circ g$ .

**Partie C : (4 points)**

On considère la matrice de l'application  $f$  étudiée dans la partie A.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Justifier que  $M$  est inversible.
2. Déterminer la matrice inverse de  $M$  avec la méthode qui vous convient.