Chapitre 6 : Diagonalisation de matrice

16 Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

Soit $A = \left(A_j\right)_{j=1..n}$ une base de E et $B = (B_i)_{i=1..n}$ une autre base de E.

Alors un vecteur V de E s'écrit $X_A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_A$ dans la base A et $Y_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$ dans la base B.

Note :
Traditionnellement lorsqu'un vecteur apparaît

sans indice c'est qu'il s'agit de ses coordonnées standards (i.e. celles dans la base canonique). En revanche, si l'on considère une autre base que la base canonique il est important d'annoter en indice la base choisie.

Par convention, si l'on note un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sans préciser la base, c'est qu'il s'agit des coordonnées de ce vecteur pour la base canonique.

Exemple 30 :
Calculez les coordonnées d'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Définition 16.1
On appelle ***matrice de passage*** *de (la base) A vers (la base) B, notée* $P_{A\to B}$*, la*

matrice qui permet de changer de coordonnées. Ainsi $X_A = P_{A\to B}.Y_B$.

Il est facile de montrer que $P_{A\to B} = (B_1, ...B_n)$ *où les* B_i *sont écrits dans la base* A.

Remarque :

Cette convention peut sembler peu naturelle puisque l'on exprime les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles. Ainsi $P_{A\to B}$ prend des coordonnées de B et les transforme en coordonnées de A. Cependant il s'agit de la convention française, la convention anglosaxonne étant parfois l'inverse...

Ainsi, avec cette convention française $P_{A\to B}$ représente l'application linéaire qui à chaque vecteur de base de A associe le vecteur de base de B correspondant (dans l'ordre). Cette matrice étant écrite pour la base A au départ et à l'arrivée...

Exemple 31 :

Calculez la matrice de passage de la base canonique vers la base $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

Pour le calcul, il peut être préférable d'utiliser l'équation suivante : $Y_B = P^{-1}_{A\to B}.X_A$, qui permet d'exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes et de retenir que $P^{-1}_{A\to B} = (A_1, ...A_n)$, où les A_i sont écrits dans la base B.

Exemple 32 :

Prenons comme base $A = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ et $B = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

1) Calculez l'inverse de la matrice de passage de A vers B.

2) Trouvez les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dans la base A.

3) Trouvez les coordonnées de ce vecteur dans

la base B en utilisant l'inverse de la matrice de passage. Vérifiez votre résultat.

Solution :

Remarquons que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = +3/2.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/2.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

Donc l'inverse de la matrice de passage de A vers B est $P^{-1}_{A \to B} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1/4.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3/2.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base A.

Ce vecteur s'écrit donc $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}_A$ dans la base A.

Si l'on veut connaître les coordonnées de

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base B on calcule $P^{-1}_{A \to B}.\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}_A$.

Donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ dans la base B.

Vérification : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 2.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ok...

Remarque :

Toute matrice de passage est inversible (régulière) et

réciproquement. Enfin, la matrice de passage de B vers A est tout simplement l'inverse de la matrice de passage de A vers B, ainsi : $P_{B \to A} = P^{-1}_{A \to B}$.

17 Matrices équivalentes

Définition 17.1

On dit que deux matrices de même format sont ***équivalentes*** *si elles représentent la même application linéaire pour certaines bases.*

Proposition 17.1

Deux matrices A et B de même format sont équivalentes si et seulement si il existe deux matrices régulières P et Q telles que :
$Q.A.P = B$ *i.e.* $A = Q^{-1}.B.P^{-1}$.

Proposition 17.2

Toute matrice (n,p) et de rang r est équivalente à la matrice : $T = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *où I_r est la matrice identité d'ordre r.*

Preuve *Soit M une matrice (n,p) de rang r. Définissons son application linéaire associée u tel que u soit représentée par M*

pour les bases canoniques. Comme le rang de M vaut r on en déduit que le rang de u vaut aussi r et qu'une base de l'image contient r vecteurs. Soit $(f_1, ...f_r)$ une base de l'image ayant pour antécédents $(e_1, ...e_r)$. Comme l'espace d'arrivée est de dimension n nous pouvons compléter la base de l'image avec $(f_{r+1}, ...f_n)$ pour former une base de l'espace d'arrivée.

D'après la démonstration sur le théorème des dimensions nous pouvons adjoindre à $(e_1, ..., e_r)$ une base du noyau de façon à créer la base $\big(e_1, ..., e_r, e_{r+1}..., e_p\big)$ pour base de l'espace de départ.

La matrice représentative de u avec $\big(e_1, ..., e_p\big)$ comme base de départ et $(f_1, ...f_n)$ à l'arrivée est définie par $T = \big[u(e_1)...u(e_p)\big]$ où les coordonnées en colonne correspondent au décomposition des vecteurs dans la base $(f_1, ...f_n)$. Or par définition pour $k \leq r$:

$u(e_k) = f_k$ et pour $k > r$: $e_k \in \ker u$ donc $u(e_k) = \overrightarrow{O_F} = 0.f_1 + ... + 0.f_n$.

Pour les bases choisies u est représentée par $T = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Conclusion : M et T représentent la même application linéaire donc M et T sont équivalentes.

Corollaire 17.1

Les matrices de même format et de même rang sont équivalentes.

<u>Exemple 33 :</u>

Les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ sont-elles équivalentes ?

18 Matrices diagonalisables

Définition 18.1

*Deux matrices carrées d'ordre n, A et B sont dites **semblables** s'il existe une matrice carrée P d'ordre n telle que :*
$B = P.A.P^{-1}$.

Définition 18.2

*Une matrice carrée A d'ordre n est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale D, ainsi $A = P.D.P^{-1}$ où P est une matrice de passage.*

Proposition 18.1

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

19 Valeurs et vecteurs propres

Définition 19.1

Soit u un endomorphisme (i.e. $u \in L(E, E)$), *le vecteur* $V \neq \overrightarrow{0}$ *est un* ***vecteur propre*** *de* u *si et seulement si* $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $u(V) = \lambda.V$.

On dit que λ *est une* ***valeur propre*** *et que* V *est un vecteur propre associé à* λ.

On dit que l'ensemble $E_\lambda = \{V \in E | u(V) = \lambda.V\}$ *est l'****espace propre*** *associé à* λ.

Propriétés :

— Si V est un vecteur propre, alors il est associé à une unique valeur propre λ.
— Les espaces propres sont des sous-espaces vectoriels de E (ils sont deux à deux d'intersection le vecteur nul).

Définition 19.2

On appelle ***polynôme caractéristique*** *d'une matrice* A *d'ordre* n *et on note* $P_A(\lambda)$ *le polynôme défini par :* $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I)$ *où* I *est la matrice identité d'ordre* n.

Proposition 19.1

Les valeurs propres d'une matrice M *sont exactement les racines du polynôme caractéristique.*

Définition 19.3

On appelle ***multiplicité*** *d'une valeur propre le nombre de fois qu'elle est racine du polynôme caractéristique.*

Définition 19.4
*On appelle **trace** d'une matrice la somme des éléments diagonaux de la matrice.*

<u>Propriétés importantes :</u>

- Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les racines de $P_A(\lambda)$.
- $P_A(\lambda)$ est un polynôme de degré n (l'ordre de la matrice) et si ce dernier est factorisable on a : $P_A(\lambda) = (-1)^n . \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$.
- Le produit des valeurs propres $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$.
- La somme des valeurs propres $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Trace(A)$.
- Les espaces propres associés aux valeurs propres sont au moins de dimension 1.

Proposition 19.2
Soit A une matrice d'ordre n, alors on a équivalence entre :
(i) A est diagonalisable.
(ii) La somme des dimensions des espaces propres vaut n.
(iii) $\forall \lambda$ valeur propre, $\dim(E_\lambda)$ = multiplicité de λ.

Corollaire 19.1
Si A est une matrice $n * n$ qui admet n valeurs propres simples (de multiplicité 1), alors A est diagonalisable.

Proposition 19.3 *Lorsque A est diagonalisable alors $A = P.D.P^{-1}$*
avec $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$
et $P = \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & V_n \end{bmatrix}$
où V_i est un vecteur propre associé à λ_i.

Méthode de diagonalisation :
Soit A une matrice carrée,

1. Résoudre $\det(A - \lambda I) = 0$ et trouver les racines : $\lambda_1, ..., \lambda_n$.
2. Éventuellement contrôler vos résultats avec le déterminant et la trace.
3. Pour chaque racine distincte λ_i, calculer l'espace propre associé E_{λ_i} en résolvant le système $(A - \lambda_i.I)\,X = \overrightarrow{0}$.
4. En déduire des vecteurs propres qui sont des vecteurs libres de E_{λ_i}.
5. Regarder si la matrice est bien diagonalisable en vérifiant que les dimensions des espaces propres sont égaux aux multiplicité des racines.
6. Si c'est le cas, donner P et D, éventuellement si on vous le demande calculer P^{-1}.

Exemple 34 :
On veut diagonaliser la matrice représentative des applications linéaires suivantes :
$f(x, y) = (x + 2y, y + 2x)$.
$f(x, y, z) = (x - y, -x + z, -2x + y + z)$.

20 Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée, on s'intéresse donc au calcul de $A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n\ fois}$

Pour éviter la confusion entre la puissance n-ième et la dimension de la matrice on considérera une matrice carrée d'ordre m.

Proposition 20.1 *Soit* $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}$ *une matrice diagonale de* $\mathbb{R}^m$ *alors*

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m^n \end{bmatrix}$$

La preuve se fait par récurrence en posant le produit.

Proposition 20.2
Si A est diagonalisable, alors $A^k = P.D^k.P^{-1}$.

Exemple 35 :
Calculez A^k pour les matrices suivantes :

$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (difficile)

Le second exemple montre que même pour des matrices qui ont l'air très simples d'un prime abord, le calcul de la puissance n-ième d'une matrice n'est pas toujours facile à faire.

21 Système récurrent d'ordre 1

Dans un espace $\mathbb{R}^m$, on considère un système d'équation évoluant en fonction de n un entier qui peut par exemple être des jours. Les coordonnées du vecteur au temps $n+1$ dépend linéairement des coordonnées du vecteur au temps n. On peut ainsi considérer que chaque coordonnée du vecteur est une suite.

Si on considère un système récurrent sur $\mathbb{R}^3$, il s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

De façon générale, si l'on considère $U_n \in \mathbb{R}^m$ comme étant le vecteur de $\mathbb{R}^m$ au temps n, un système récurrent s'écrit :

$$U_{n+1} = A.U_n$$

Ce type de système est déterministe dans le sens où si l'on connaît les coordonnées du vecteur à l'instant d'origine pour $n = 0$ alors U_n est entièrement déterminé. La proposition suivante nous indique comment calculer U_n :

Proposition 21.1 *On considère le système récurrent suivant :*

$U_{n+1} = A.U_n$

alors la solution de ce système est :

$U_n = A^n.U_0$

où U_0 correspond aux conditions initiales c'est à dire au vecteur d'origine.

La proposition se prouve aisément en utilisant une preuve par récurrence.

Ainsi, pour résoudre un système récurrent d'ordre 1, il faut calculer A^n et lorsque la matrice est diagonalisable on utilise la décomposition diagonale de A.

Exemple 36 :

Étudiez le système suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 4Y_n \\ Y_{n+1} = 2.X_n + 3Y_n \end{cases}$$