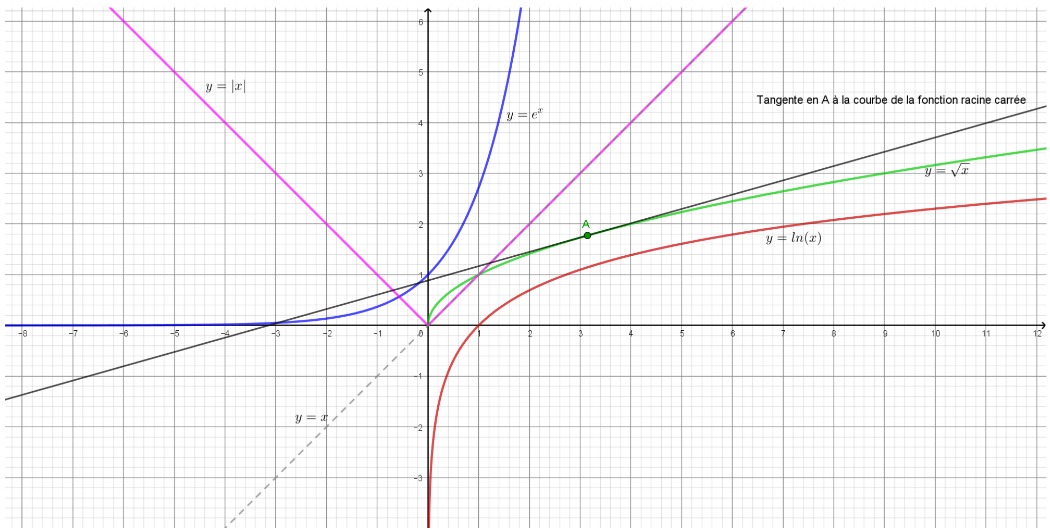
Correction du TD1. Analyse.

Rappels sur les fonctions usuelles :



Exercice 1.
a)$f(x) = \frac{x^2-2}{x+2}$. C'est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes). Le dénominateur doit être non nul. Or, $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. La fonction est, donc, définie pour tous les réels sauf -2.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$. Cette fonction est définie uniquement si $x^2+x-2 \geqslant 0$. Cherchons, donc, quand le polynôme du second degré x^2+x-2 est positif. Pour cela on calcule son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$. On rappelle ici que $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$, donc $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$. Δ est strictement positif, le polynôme a deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = 1$.

Rappel : Si $\Delta > 0$, le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire de a entre les racines.

Comme $a = 1$ est positif, $x^2 + x - 2 \geqslant 0$ sur $]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.

Donc, $D_f =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$

c)$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$. Cette fonction un quotient de deux fonctions. Trois conditions doivent être réunies pour que f soit définie :
• Le numérateur doit être défini.
• Le dénominateur doit être défini
• Le dénominateur doit être non nul.
Cela se traduit par : $x + 1 \geqslant 0$ et $x - 1 \geqslant 0$ et $x - 1 \neq 0$. c'est à dire, $x \geqslant -1$ et $x \geqslant 1$ et $x \neq 1$.
Ceci est vérifié si et seulement si $x > 1$. Ainsi, $D_f =]1; +\infty[$.

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Cette fonction est définie uniquement si $\frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$ et $x - 1 \neq 0$.
Le quotient $\frac{x+1}{x-1}$ a le même signe que le produit $(x + 1)(x - 1)$ qui est un polynôme du second degré écrit sous forme factorisée. On reconnait ses racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$ et son coefficient $a = 1$. Le

polynôme est donc positif (à l'extérieur des racines) c'est à dire, si $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$. On rajoute ensuite la condition $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.
Finalement, $D_f =]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[$.

e) $f(x) = |x|$. C'est la fonction valeur absolue que nous avons rappelé. Elle est définie sur $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$. Par contre remarquer qu'elle n'est pas dérivable en 0.

On rappelle qu'une fonction est dérivable en un réel x_0 si sa courbe admet une et **une seule** tangente, **non parallèle à l'axe des ordonnées**, au point d'abscisse x_0.

f) $f(x) = |x+1|$. Il s'agit de la valeur absolue d'une fonction à savoir, la fonction $x \longmapsto x+1$. Cette dernière est une fonction affine donc définie sur $\mathbb{R}$ et par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$.

D'après ce qui précède, cette fonction n'est pas dérivable en $x = -1$.

g) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est aussi définie sur $\mathbb{R}$. Il faut remarquer que pour tout réel x, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et $e^x \neq 0$.
Donc, $D_f = \mathbb{R}$.

h) $f(x) = ln(x-4)$. Cette fonction est définie uniquement si $x - 4 > 0$, c'est à dire, si $x > 4$. Ainsi, $D_f =]4;+\infty[$.

i) $f(x) = ln(|x-4|)$. Cette fonction est définie uniquement $|x-4| > 0$ Or on sait que la valeur absolue d'un réel est toujours positive, donc la fonction f est définie si et seulement si $x - 4 \neq 0$, c'est à dire, $x \neq 4$. Ainsi, $D_f =]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$.

Exercice 2.
1) Nous allons déterminer la fonction réciproque de la fonction f définie par : $f(x) = 3x+1$.

Rappelons qu'une fonction f admet une réciproque si et seulement si elle bijective.

f est une fonction affine donc une bijection sur $\mathbb{R}$.

Notons f^{-1} la fonction réciproque de f. Soit x un réel et y le réel défini par : $f(x) = y$. Alors, $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ donc, $f(x) = y \Leftrightarrow 3x+1 = y \Leftrightarrow 3x = y-1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{3}$. Ainsi, f^{-1} est définie par : $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$. La variable y est muette, on peut la remplacer par la natation traditionnelle x. ainsi, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.

2) Soit x un réel, $gof(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (3x+1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x + 1 - 1 = 9x^2 + 6x$. La fonction gof est donc définie par $gof(x) = 9x^2 + 6x$.

Soit x un réel, $fog(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 1 = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 3 + 1 = 3x^2 - 2$. La fonction fog est donc définie par $fog(x) = 3x^2 - 2$.

On remarque $gof \neq fog$. On dit que la composition des applications n'est pas commutative.