Chapitre 4 : Les matrices

9 Opérations sur les matrices

9.1 Somme et différence de matrices

On peut définir la somme et la différence de matrice pour des matrices de même ordre (taille) $n * p$.

Ainsi, si $A = \left[a_{ij}\right]$ et $B = \left[b_{ij}\right]$, alors $A + B = \left[c_{ij}\right]$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

De même, $A - B = \left[c_{ij}\right]$ où $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Remarque :
Si u et v sont deux applications linéaires de matrice représentative U et V, alors on peut définir l'application $u + v$. Il est alors facile de prouver que cette application est linéaire et que sa matrice représentative est $U + V$. De même la différence de deux applications linéaires est une application linéaire et sa matrice représentative est la différence des matrices représentatives.

9.2 Produit d'une constante par une matrice

Le produit d'une matrice $\left[a_{ij}\right]$ par un scalaire k est la matrice de même format composée des éléments $\left[k.a_{ij}\right]$.

Ainsi, si u est une application linéaire représentée par $\left[u_{ij}\right]$, alors la matrice représentative de l'application linéaire $k.u$ est $\left[k.u_{ij}\right]$.

9.3 Produit de matrice

Soit A une matrice d'ordre $n * p$ alors le produit $A.B$ n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Soient $A = \left[a_{ij}\right]$ et $B = \left[b_{ij}\right]$, alors le produit matriciel de $A.B = \left[a_{ij}\right].\left[b_{ij}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right]$.

Exemple 14

$$\begin{bmatrix}3&1\\2&1\\2&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-1\\1&3\end{bmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}2&-1\\1&3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3&1\\2&1\\2&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}7&0\\5&1\\4&-2\end{bmatrix}\end{array} = \begin{bmatrix}7&0\\5&1\\4&-2\end{bmatrix}$$

Explication au niveau des applications linéaires :

Soit $u : E \to F$ et $v : F \to G$, alors on peut définir l'application linéaire composée $v \circ u : E \to G$ en définissant pour $x \in E$:

$v \circ u\,(x) = v\,(u\,(x))$.

On peut alors vérifier que si U et V sont les matrices représentatives de u et v, alors $v \circ u$ a pour matrice représentative $V.U$.

Propriétés :

- Le produit des matrices est associatif, ainsi : $A.(B.C) = (A.B).C$.
- Le produit est distributif sur l'addition : $A.(B + C) = A.B + A.C$.
- Le produit des matrices n'est en revanche en général pas commutatif ainsi, $A.B \neq B.A$ (en général).

Exercice :

L'ensemble des matrices réelles muni de l'addition et de la multiplication ainsi définis est-il un anneau ? un corps ?

10 Matrices particulières

Définition 10.1
*Une matrice est **carrée** si le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.*

Les éléments $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ constituent la **diagonale principale** de la matrice.

Définition 10.2
*Une matrice carrée est dite **diagonale** si tous les éléments situés hors de la diagonale principale sont nuls.*

On doit donc avoir
$\forall i, j : i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$

$$\text{Ainsi } M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Définition 10.3
*Une matrice carrée est dite **triangulaire***

***supérieure** si tous ses éléments en dessous de la diagonale sont nuls.*

$$\text{Ainsi } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Définition 10.4
*Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** si tous ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls.*

$$\text{Ainsi } M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Définition 10.5
*On appelle **transposée** d'une matrice $M = \left[a_{ij}\right]$ la matrice ${}^tM$ composée des éléments symétriques ${}^tM = \left[a_{ji}\right]$. (En bref, les lignes deviennent colonnes et les colonnes deviennent*

lignes).

Exemple 15

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$. *Alors,* ${}^tM = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$.

Définition 10.6

Une matrice carrée est dite ***symétrique*** *si* $M = {}^tM$.

En d'autres termes, une matrice est symétrique si les éléments composant la matrice sont symétriques par rapport à la diagonale principale.

Exemple :

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Définition 10.7

On appelle matrice ***identité*** *la matrice dia-*

gonale dont chaque élément de la diagonale vaut 1*.*

Exemple pour $\mathbb{R}^3$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit bien sûr de l'élément neutre pour la multiplication de matrice.

Définition 10.8

Une matrice M *d'ordre* $n * p$ *est dite :*

- *Matrice ligne si* $n = 1$ *et* p *quelconque.*
- *Matrice colonne si* n *quelconque et* $p = 1$*.*
- *Matrice nulle si tous les éléments de la matrice sont nuls.*

La matrice nulle est bien sûr l'élément neutre pour l'addition de matrice.

Définition 10.9
*Une matrice M est dite **idempotente** si le produit $M.M$ est égal à M.*

Exemple :
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Définition 10.10
*Une matrice M est dite **nilpotente** s'il existe un entier positif $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = [0]$.*

Remarque :
Le calcul peut être difficile (si c'est pour $n = 36$). Pour aller plus vite, calculer M^2 puis $\left(M^2\right)^2$ etc...

Exemple :
$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$ est-elle nilpotente ?

11 Déterminant d'une matrice

11.1 Forme multilinéaire alternée

Définition 11.1
Soit E un espace vectoriel de dimension n.

Soit f : $\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ (X_1, X_2, ..., X_n) \mapsto f(X_1, X_2, ..., X_n) \end{cases}$

*alors f est **multilinéaire alternée** si :*

(i) (Principe de linéarité par rapport à chaque variable) $\forall i \leq n$:
$f\left(X_1, .., \alpha X_i + \beta X_i', .., X_n\right) = \alpha . f(X_1, .., X_i, .., X_n) + \beta . f\left(X_1, .., X_i', .., X_n\right)$.

(ii) (Principe d'alternance) $\forall i, j \in \{1...n\}$:
$f(X_1, .., X_i, .., X_j, .., X_n) = -f(X_1, .., X_j, .., X_i, .., X_n)$.

Propriétés :
- Une forme multilinéaire alternée est nulle si deux vecteurs sont égaux.
- La valeur de $f(X_1, ..., X_n)$ est inchangée

si on ajoute à l'une des variables une combinaison linéaire des autres variables :

$$f\left(X_1, ..., X_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j X_j, ..., X_n\right) = f\left(X_1, ..., X_i, ..., X_n\right).$$

11.2 Calcul du Déterminant

Le déterminant est une forme multilinéaire alternée particulière.

Des propriétés précédentes, on déduit que le déterminant est nul si les vecteurs sont linéairement dépendants.

En fait, la réciproque est vraie aussi.

Proposition 11.1

Le déterminant de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est nul si et seulement si les n vecteurs sont linéairement dépendants.

$Det\left(X_1, ..., X_n\right) = 0 \Leftrightarrow \left(X_1, ..., X_n\right)$ *est une famille liée.*

$Det\left(X_1, ..., X_n\right) \neq 0 \Leftrightarrow \left(X_1, ..., X_n\right)$ *est une famille libre.*

Cette méthode est la méthode la plus rapide pour savoir si n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont libres ou liés.

11.2.1 Déterminant de matrice simple

Attention : le calcul du déterminant d'une matrice n'est faisable que si la matrice est carrée.

On note généralement le déterminant avec deux barres verticales pour éviter la confusion avec la notation de la matrice pour laquelle on utilise soit les crochets soit les parenthèses. Cependant cette notation pose problème pour des matrices 1×1 puisqu'il peut y avoir confusion avec la valeur absolue...

— Soit M une matrice 1×1.
  $\det(M) = \det\left([a]\right) = |a| = a.$
— Soit M une matrice 2×2.

$\det(M) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c.$

— Soit M une matrice 3×3.
(Règle de Sarrus)
$\det(M) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ alors on répète les deux premières colonnes à la fin :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \det(M) = \; & a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ & -a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}. \end{aligned}$$

Exemple 19 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice :

Pour quels valeurs de α la famille de vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est elle libre ?

11.2.2 Calcul général du déterminant

Soit $M = [a_{ij}]$ une matrice carrée de dimension n.

Définition 11.2 *On appelle **mineur** de a_{ij} le terme $\Delta_{ij} = \det M_{ij}$ où M_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne.*

*On appelle **cofacteur** de a_{ij} le terme $A_{ij} = \det(N_{ij})$ où N_{ij} est la matrice obtenue en annulant la ième ligne et la jème* *colonne et en remplaçant le terme a_{ij} par* 1.

Remarque :
Le cofacteur de a_{ij}, $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\Delta_{i\,j}$ où Δ_{ij} est le mineur principal de a_{ij}.

Exemple 20 :
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.Calculez Δ_{22} et A_{22}.

Définition 11.3
Le déterminant de la matrice M est noté $\det M$*, il vaut :*

$$\forall i : \det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}.a_{ij}.\Delta_{ij}$$
$$\forall j : \det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}.a_{ij}.\Delta_{ij}$$

Cela revient donc à développer par une ligne ou par une colonne.

Exemple 21 :
$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
Développons par exemple ici par rapport à la 1ère ligne :
$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +2.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 4 = -2.$

On peut aussi développer par n'importe quelle ligne ou colonne à condition de ne pas se tromper dans le signe des cofacteurs. Développons, par exemple, par rapport à la 2ème ligne :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2. \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0. \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

<u>Propriétés :</u>

Le déterminant d'un produit de matrice $n \times n$ est égal au produit des déterminants :

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

$$= \det(B).\det(A) = \det(B.A).$$

et

$$det(^tA) = det(A).$$

On peut faire des opérations sur les lignes ou sur les colonnes avant de développer le déterminant.

<u>Exercice :</u>

1. Calculez le déterminant de la matrice M suivante : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$
2. Pour quelles valeurs de λ la famille suivante est-elle libre ?
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\lambda \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1-\lambda \end{pmatrix} \right\}$$

11.3 Rang d'une matrice

Soit M une matrice (matrice $n \times m$).

Définition 11.4
On appelle ***matrice extraite d'ordre p****, une matrice carrée construite en sélectionnant p lignes et p colonnes de M et en ne gardant que les éléments ainsi sélectionnés.*

On trouve parfois le terme de sous-matrice pour désigner une matrice extraite.

Exemple 22 :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Définition 11.5

On appelle ***rang d'une matrice*** *M (non nécessairement carrée) l'ordre de la plus grande matrice extraite de déterminant non nul.*

Exemple 23 :

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Proposition 11.2

Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice composée des vecteurs de la famille.

Exemple 24 :

Soit la famille de vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ quel est le rang ? Est-ce une famille génératrice ?

Remarque :

Cette méthode est une méthode rapide pour calculer le rang d'une famille de vecteurs.

D'autre part on voit que l'on a déjà défini le rang d'une application linéaire. On vient de définir le rang d'une matrice. On peut donc légitimement se demander quel lien y-a-t il entre le rang de f et le rang de sa matrice représentative. Heureusement la proposition suivante nous rassure...

Proposition 11.3

Le rang d'une application linéaire f noté $Rang(f)$ est égal au rang de sa matrice représentative.

Exemple 25 :

Soit $f(x, y, z) = (2y - x, z + y)$. Déterminez le noyau de f, quelle est sa dimension ? En déduire le rang de f.

11.4 Réduite de Gauss

Il existe une autre méthode pour trouver le rang d'une matrice il s'agit de calculer la réduite de gauss de la matrice. La méthode de réduction revient à faire des opérations sur les lignes et sur les colonnes (ou des inversions de lignes ou colonnes) pour rendre la matrice triangulaire supérieure (comme dans la résolution d'un système). Le rang apparaît alors après avoir ordonné les valeurs non nulles sur la diagonale avant celles qui sont nulles le rang est égal au nombre de valeur non nulles sur la diagonale.

Attention : il est important de remplir au maximum la diagonale.

Ainsi il faut encore 'réduire' la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ on obtient donc en fait $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et le rang est donc 2 et non 1.

Exemple 26 :

Calculer le rang de : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.