UNIVERSITE PARIS 1 - UFR de GESTION
TD-3
Application linéaire
Licence 1ère année

Exercice 1:

Pour chacune des applications suivantes:

a) Déterminer si l'application est linéaire ou non en donnant l'espace de départ et d'arrivée.
b) Déterminer le noyau de l'application linéaire ainsi qu'une base du noyau.
c) Déterminer le rang par deux méthodes.
d) Préciser si l'application est injective, surjective ou bijective.
e) Donner la matrice représentative.

(i) $f_1(x,y,z) = (x+y-z)$ (ii) $f_2(x,y) = (x+y-2)$.

(iii) $f_3(x,y,z) = (x+2y-z,0,z)$ (iv) $f_4(x,y) = \left(2x-y^2,y,0\right)$.

(v) $f_5(x,y,z) = (x-z,y+2z,x+z,z)$ (vi) $f_6(x,y,z) = (x+y,y+z,x+z)$.

Exercice 2:

Déterminer pour chaque matrice l'espace de départ et l'espace d'arrivée de l'application linéaire associée, puis donnez sa définition linéaire standard:

(i) $M_1 = [3]$ (ii) $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 3:

Soit $f(x,y,z) = (z,-z,x+y+z)$.

1°) Donner les bases de $Ker\ f$ et de $Im\ f$ (on choisira des vecteurs de composantes égales à -1 ou 0 ou 1).

2°) En déduire que $Ker\ f \subseteq Im\ f$.

3°) Donner le rang de f, f est-elle injective, surjective, bijective ?

4°) Calculer f^2 puis f^3. En déduire f^n pour tout $n \geq 2$.

5°) Soient $V_1(1,-1,1)$, $V_2(1,-1,0)$ et $V_3(-1,0,1)$. Montrer que V_1, V_2, V_3 constituent une base.

6°) Calculer $f(V_i)$ dans la base V_1, V_2, V_3 pour $i \in \{1,2,3\}$.

7°) Soit V un vecteur de coordonnées (x,y,z) dans la base V_1, V_2, V_3. Montrer que pour tout $n \geq 2$: $f^n(V) = f^2(V) = xV_1$. Comparer ce résultat avec le 4°).

8°) Donner la matrice A représentative de f dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

9°) Donner la matrice B représentative de f dans la base V_1, V_2, V_3 au départ et la base canonique à l'arrivée.

10°) Donnez la matrice C représentative de f dans la base canonique au départ et la base V_1, V_2, V_3 à l'arrivée.

11°) Donner la matrice D représentative de f dans la base V_1, V_2, V_3 au départ et à l'arrivée.