CHAPITRE 3 : DERIVABILITE DE FONCTIONS NUMERIQUES ET DIFFERENTIELLES

1ère partie : Dérivabilité

1. Définition :

Une fonction f est dérivable en un point a si elle est définie sur un voisinage de a et si le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une **limite finie** lorsque x tend vers a. Cette limite est appelée **dérivée de la fonction f au point a,** notée **f'(a)**. $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

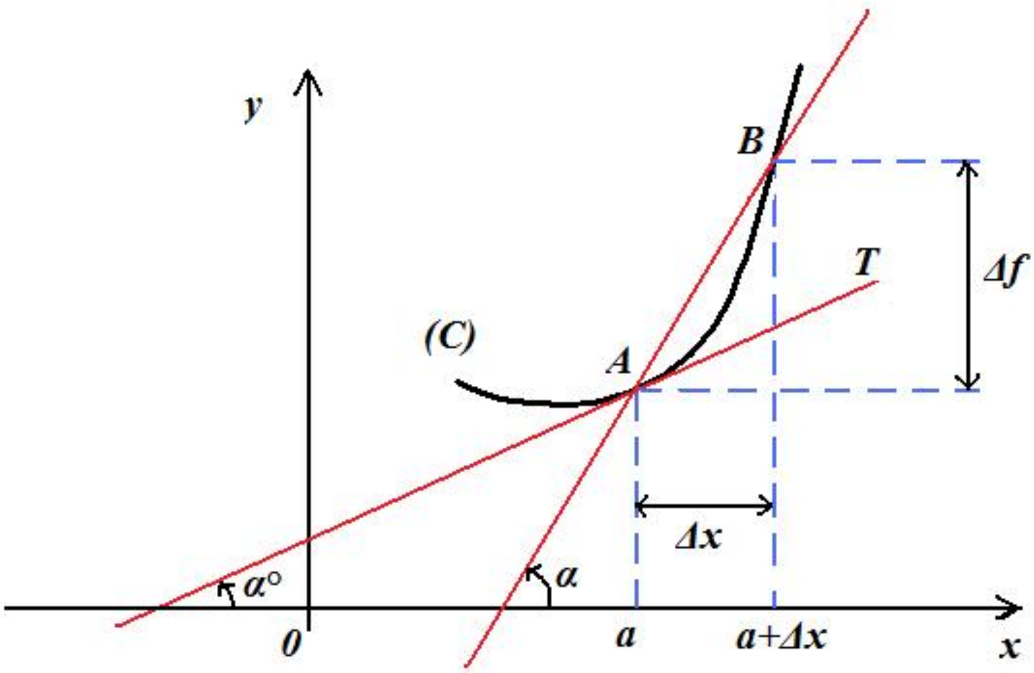
Autrement dit, la dérivée est la limite du rapport des accroissements de f et de x lorsque x tend vers a. On peut également noter :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

2. Signification géométrique de la dérivée :

2.1. Illustration graphique :

Soit (C) la courbe de représentation de la fonction f.
A et B sont les points de (C) d'abscisses a et a+Δx.



La sécante AB a pour pente le rapport entre la différence des ordonnées de B et A et la différence de leurs abscisses. Soit α l'angle (Ox, AB). On a $\tan(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$
La tangente T (tangente à (C) en A) a pour pente : $\tan(\alpha°) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a)$.

Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de la fonction f admet une tangente au point (a,f(a)), de coefficient directeur f'(a).

2.2. Remarque :

Si $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ tend vers l'infini quand Δx tend vers 0, on dit par extension de la notion de dérivée que la dérivée est infinie en a. La tangente à (C) au point d'abscisses a sera verticale.

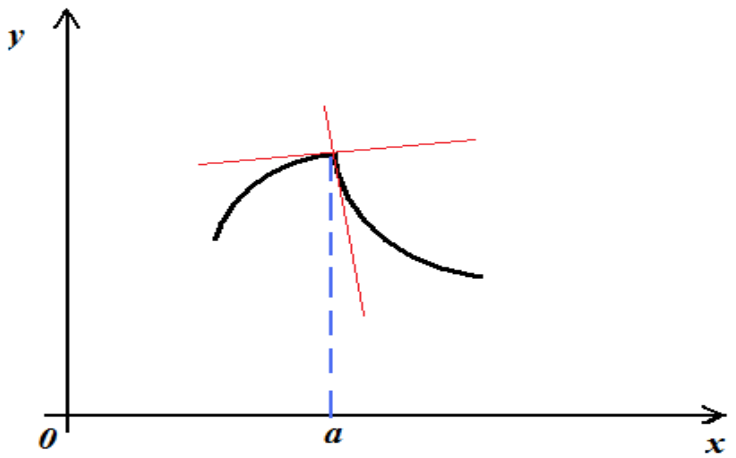
***Si f' (a) = ±∞, f* n'est pas dérivable en a.**

3. Dérivée et variations marginales :

3.1. Dérivée à droite, dérivée à gauche :

La limite finie de $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ peut différer suivant que Δx tende vers *a* par valeurs positives ou négatives. Dans ce cas, la courbe (C) admettra au point d'abscisse *a* deux tangentes de pentes différentes. Ce point est appelé point anguleux. Les dérivées à droite et à gauche en *a* sont notées respectivement $f'^{+}(a)$ et $f'^{-}(a)$.
Les dérivées à droite et à gauche en a peuvent également être notées respectivement $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.

Illustration :



Si $f'^{+}(a)$ = valeur finie, f est dérivable à droite de *a*.
Si $f'^{-}(a)$= valeur finie, f est dérivable à gauche de *a*.

f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite et à gauche en *a* et $f'^{+}(a) = f'^{-}(a)$.

Si $f'^{+}(a) \neq f'^{-}(a)$, f n'est pas dérivable en *a*.

Récapitulatif : Comment montrer qu'une fonction n'est pas dérivable en *a* ?

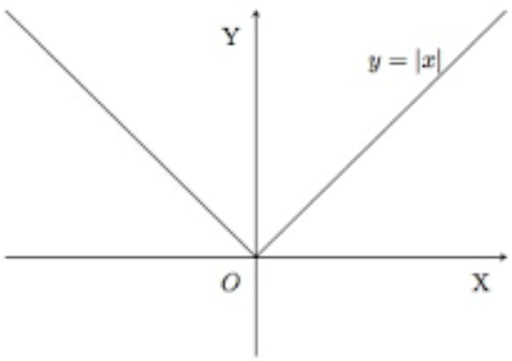
Montrer que **f' (*a*) = ±∞ (tangente verticale)**
Ou montrer que **$f'^{+}(a) \neq f'^{-}(a)$ (point anguleux)**

3.2. Dérivabilité et continuité :

Théorème : *Une fonction dérivable en a est continue en a.*

Attention : la réciproque n'est pas vraie.
Exemple : f(x)= $|x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

En effet :
Si $x \geq 0$: $f(x)= |x| = x$ et $f'(x)= 1$.
Donc $f'^{+}(0) = 1$
Si $x \leq 0$: $f(x)= |x| = -x$ et $f'(x)= -1$
Donc $f'^{-}(0) = -1$
Donc $f'^{+}(0) \neq f'^{-}(0)$ et *f* n'est pas dérivable en 0 (point anguleux)



4. Dérivabilité sur un intervalle et dérivabilité n-ième :

- Une fonction est dite dérivable sur un intervalle]a ;b[si elle est dérivable en chacun des points de cet intervalle.
- La fonction est dite dérivable sur [a ;b] si elle est dérivable sur]a ;b[, dérivable à gauche en b et à droite en a.
- Elle est dite « dérivable » si elle est dérivable sur son ensemble de définition.
- La dérivée d'une fonction sur un intervalle étant elle-même une fonction, elle peut à son tour être dérivable. Si cette dérivée existe, on la note : $(f')' = f''$
-Par itération, on définit la dérivée n-ième de f (si elle existe) à partir de sa dérivée (n-1)-ième : $f^{(n)'} = (f^{(n-1)'})'$

5. Théorèmes généraux sur les dérivées :

5.1. Opérations et dérivation :

Théorème :
Soient α et β deux constantes, f et g deux fonctions dérivables.
Alors :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$et \quad (gof)' = g'of * f'$$

Conséquences :

$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ $\qquad$ $(\ln(|f|)' = \frac{f'}{f}$

$(f^n)' = nf^{n-1}f'$ $\qquad$ $(e^f)' = f'e^f$

$(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$

5.2. Dérivée d'ordre de la réciproque d'une fonction :

Si f admet une inverse f^{-1} sur intervalle I et si f est dérivable sur I, avec f'(x) ≠ 0 $\forall x \in I,$ alors f^{-1} est dérivable sur l'intervalle image J = f(I) et on a : $(\boldsymbol{f^{-1}})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f'of^{-1}}}$

6. Equation de la tangente en un point :

Si f est dérivable en x0, alors la courbe C de f admet une tangente au point de coordonnées (x_0 ; $f(x_0)$).

Son équation est : $y=f'(x_0)\,(x- x_0) + f(x_0)$

Exemple :

$f(x)= \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

Quelle est la tangente au point $(x_0 ; f(x_0))= (3;1)$?

$f'(x)= \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+1}}$

$f'(x_0) = f'(3) = \frac{3}{2}$

Équation de la tangente en (3 ;1) : $y = \frac{3}{2}(x - 3) + \sqrt{1} = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

Remarque : Possibilité d'avoir une tangente à gauche et à droite d'un point différentes. C'est le cas des points anguleux.

Exemple : fonction valeur absolue $f(x) = |x|$

En effet :

Si $x \geq 0$: $f(x) = |x| = x$ et $f'(x) = 1$.

Donc $f'^{+}(0) = 1$

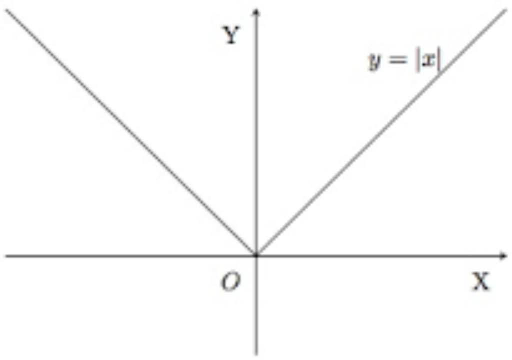
Equation de la tangente en 0+ : $y = x$

Si $x \leq 0$: $f(x) = |x| = -x$ et $f'(x) = -1$

Donc $f'^{-}(0) = -1$

Equation de la tangente en 0- : $y = -x$

$f'^{+}(0) \neq f'^{-}(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.



2ème partie : Différentielles

1. Définition :

Soit $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. f'(x) mesure la pente de la tangente en M(x, f(x)).

On peut aussi écrire : $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$ avec $\varepsilon(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$

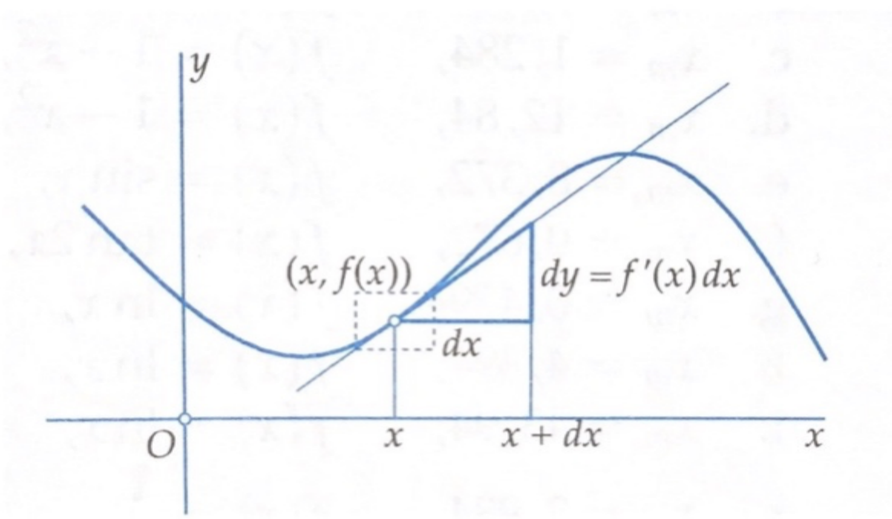
Donc : $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$

$f'(x)\Delta x$ est donc une valeur approchée de Δf, d'autant meilleure que Δx est petit.

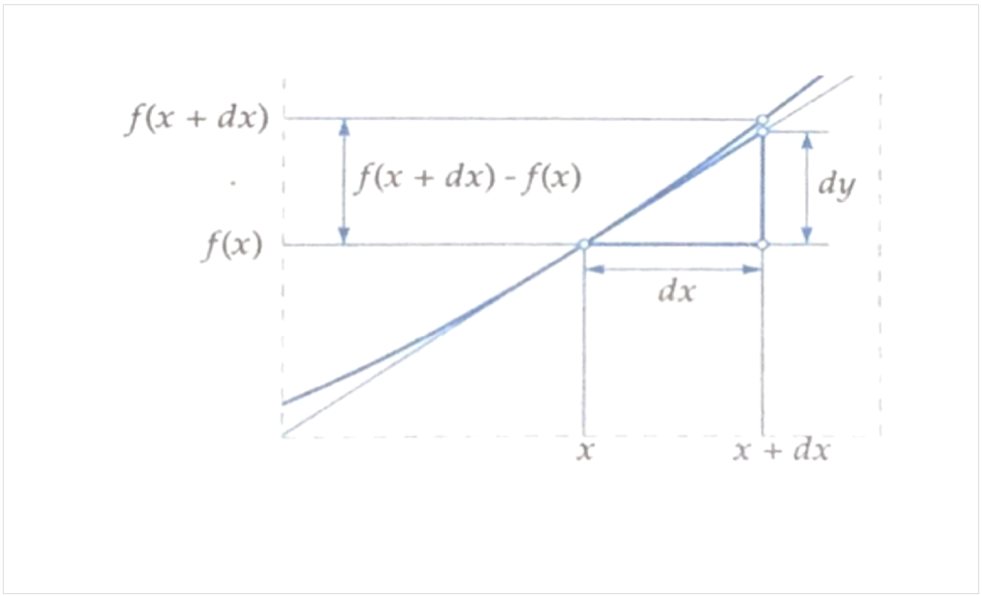
Pour un petit accroissement *dx* de x, on peut noter $f(x+dx) - f(x) \approx f'(x)\, dx$, approximation d'autant meilleure que *dx* est petit.

On appelle $f'(x)\, dx$ la différentielle de *f*, qui peut aussi se noter $d\, f_x$.
Si y = f(x), alors *d y = f'(x) dx.*

Illustration :



Si l'on regarde de très près, le graphique d'une fonction dérivable peut être vu comme un segment de droite, la droite étant la tangente au graphique au point visé. Cela revient à remplacer de graphe de *f* par sa tangente en ce point (linéarisation d'une fonction par approximation).



2. **Propriétés :**

Les règles de calcul de différentielles sont les mêmes que les règles de dérivation, mais écrites en terme de différentielles :

$$d(f + g)_x = df(x) + dg(x)$$

$$d(fg)_x = g(\mathrm{x})df(x) + f(\mathrm{x})dg(x)$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{g(\mathrm{x})d\,f(x) - \mathrm{f}(\mathrm{x})dg(x)}{g(\mathrm{x})^2} \text{ avec } g\ (\mathrm{x}) \neq 0$$

Si g est dérivable en x et f dérivable en g(x) :

$$d(f\boldsymbol{o}g)_x = (fog)'(x)\mathrm{d}x = f'(\mathrm{g(x)}).\mathrm{g}'(\mathrm{x})\ dx$$