Chapitre 5 : L'inversion de matrice

12 Introduction

L'inverse d'une matrice n'est défini que pour des matrices carrées.

Définition 12.1
Soit M une matrice carrée, alors cette matrice est dite ***singulière*** *si son déterminant est nul.*

Une matrice M carrée est ***non-singulière*** *dans le cas contraire i.e. si $det(M) \neq 0$.*

Proposition 12.1
Soit M une matrice carrée d'ordre n, si $\det(M) \neq 0$ *alors M est inversible et son inverse est M^{-1}.*

Explication :
M correspond à une application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si M est de déterminant non nul, alors son rang est n. On peut en déduire que u est bijective, ainsi on peut définir sa bijection réciproque qui à tout élément de F associe son unique antécédent de E. Cet inverse u^{-1} est lui aussi linéaire par définition. Sa matrice représentative est alors M^{-1}. La composée de u et de u^{-1} est alors l'identité. Ainsi on vérifie bien que $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I$.

13 Méthode des cofacteurs

Définition 13.1
On appelle ***matrice des cofacteurs*** *de M et on note $Co(M)$ la matrice dont les termes sont les cofacteurs (ne pas oublier les signes!!!).*

$$Co\,(M) = \left[A_{ij}\right] = \left[(-1)^{i+j}\,.\Delta_{ij}\right].$$

Définition 13.2
*On appelle **matrice adjointe** de M et on note M^* la transposée de la comatrice.*
$M^* = {}^tCo\,(M)\,.$

Proposition 13.1
Le produit d'une matrice et de sa matrice adjointe est égal au déterminant fois l'identité.
$M.M^* = (\det(M)).I.$

Proposition 13.2 *Toute matrice non singulière ($\det(M) \neq 0$) est inversible (ou régulière) et son inverse vaut :*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}.{}^tCo\,(M)\,.$$

Exemple 27 :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

14 Méthode des pivots

La méthode des pivots consiste à modifier la matrice M en une matrice identité.

Exemple 28 :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1ère étape : Ajouter à droite la matrice identité

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ème étape : Faire apparaître un 1 sur l'élément de la diagonale de la 1ère colonne en faisant une opération sur la ligne. Si le coefficient est nul il faut intervertir avec une ligne où le coefficient est non nul.

$$\begin{array}{l} L_1' = \frac{1}{2}.L_1 \\ L_2' = L_2 \\ L_3' = L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

<u>3ème étape :</u> Faire apparaître des 0 sur le reste de la 1ère colonne en retirant ou en ajoutant la 1ére ligne.

$$\begin{array}{l} L_1' = L_1 \\ L_2' = L_2 \\ L_3' = L_3 + 3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ensuite, on recommence avec la 2ème colonne : Mettre 1 sur l'élément de la diagonale, faire apparaître des zéros en dehors...

$$\begin{array}{l} L_1' = L_1 \\ L_2' = L_2 \\ L_3' = L_3 - L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3/2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Puis avec la 3ème colonne

$$\begin{array}{l} L_1' = L_1 \\ L_2' = L_2 - 5L_3' \\ L_3' = -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

Une fois que l'on a obtenu la matrice identité à gauche on lit l'inverse à droite.

Donc $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 5/2 & -2/3 & 5/3 \\ -1/2 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

Vérification :

$$M.M^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 5/2 & -2/3 & 5/3 \\ -1/2 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

15 Système d'équation linéaire

On considère un système de n équations à p inconnues $x_1, ..., x_p$:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1p}.x_p = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2p}.x_p = b_2 \\ \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + ... + a_{np}.x_p = b_n \end{cases}$$

Proposition 15.1

Ce système peut se mettre sous forme matricielle $A.X = b$

où $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *et*

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Proposition 15.2

Si le vecteur $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *est nul, les solutions du système forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.*

En effet, le système linéaire définit alors exactement le noyau de l'application linéaire associée à la matrice A.

15.1 Système de Cramer

Définition 15.1

On appelle ***système de Cramer*** *un système qui vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) La matrice est carrée ($p = n$: autant de variables que d'équations).

(ii) Le déterminant du système est non nul.

15.1.1 Méthode du pivot (matricielle)

Cette méthode revient au même que la méthode du pivot adaptée à un système de Cramer. Elle ressemble aussi à la méthode d'inversion de matrice par la méthode du pivot :

On écrit la matrice M et le vecteur b :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

On suit alors la même méthode que celle d'inversion de matrice : On fait apparaître la matrice identité à gauche en faisant des opérations sur les lignes. Les solutions en $x_1 ... x_n$ se lisent alors sur la dernière colonne.

Exercice :

$$\begin{cases} x + 2.y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

15.1.2 Méthode de la matrice inverse

Proposition 15.3

Les solutions d'un système de Cramer sont données par la matrice inverse : $X = A^{-1}.b$.

Exercice :

Reprendre l'exercice précédent en faisant la méthode de la matrice inverse.

15.1.3 Méthode de Cramer

Proposition 15.4

Soit B_j *la matrice formée par les mêmes éléments que la matrice* A *exceptés ceux de la j-ème colonne qui sont remplacés par le vecteur* b*, alors les solutions du système sont données par :*

$$\forall j : \; x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}.$$

Exemple 29 :

$$\begin{cases} x + 2.z = 3 \\ y + z = 1 \\ x + 3z = 6 \end{cases}$$