UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

UFR de GESTION
TD-2
Vecteurs et sous espaces
Licence 1ère année

Exercice 1:

Déterminer les valeurs de α (et β et γ) telles que le système ait a) aucune solution, b) une solution unique et c) une infinité de solutions.

(i) $\begin{cases} 2x + y - 4z = 2 \\ -x + \alpha y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y/2 - 2z = 1 \\ (\alpha + 1/2)\, y = 4 \end{cases}$

Le système a 3 inconnues pour 2 équations il ne peut donc pas admettre de solution unique. La seconde équation dépend de alpha et si $\alpha = -1/2$ elle devient incompatible puisque elle donne $0 = 4$.

Sinon, on a le système suivant: $\begin{cases} x = 1 - \frac{4}{2\alpha+1} + 2z \\ y = \frac{4}{\alpha+1/2} \\ z = z \end{cases}$ et l'ensemble des solutions est un sous espace affine de dimension 1.

Ainsi les réponses sont les suivantes:

a) $\alpha = -1/2$.

b) Impossible.

c) $\alpha \neq -1/2$

(ii) $\begin{cases} x + \alpha y + z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = \alpha \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y + z = 2 \\ (2 - 3\alpha)\, y + z = \alpha - 6 \\ (-1 - 2\alpha)\, y + z = -3 \end{cases}$

Utilisons par commodité z pour le dernier pivot, on obtient:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y + z = 2 \\ z + (2 - 3\alpha)\, y = \alpha - 6 \\ (-1 - 2\alpha - 2 + 3\alpha)\, y = -3 + 6 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + \alpha y = 2 \\ z + (2 - 3\alpha)\, y = \alpha - 6 \\ (\alpha - 3)\, y = 3 - \alpha \end{cases}$

Le système est directement résolvable si $\alpha \neq 3$ et la solution est entièrement déterminée donc unique:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + \alpha y = 6 + 3\alpha \\ z = \alpha - 6 + 2 - 3\alpha = -4 - 2\alpha \\ y = -1 \end{cases}$

Si $\alpha = 3$ la dernière équation devient $0 = 0$, elle est toujours vérifiée, le système est donc sous déterminé et il y a une infinité de solutions données par:

$\begin{cases} x = 2 + 3 - 7y - 3y \\ z = 3 - 6 - (2 - 3.3)\, y = -3 + 7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ z = -3 + 7y \end{cases}$

Ainsi les réponses sont les suivantes:

a) Impossible.

b) $\alpha \neq 3$.

c) $\alpha = 3$.

(iii) $\left\{\begin{array}{l} x-3y+2z=\alpha \\ 3x+2y-z=\beta \\ x+8y-5z=\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3y+2z=\alpha \\ 11y-7z=\beta-3\alpha \\ 11y-7z=\gamma-\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3y+2z=\alpha \\ 11y-7z=\beta-3\alpha \\ 0=\gamma-\alpha-\beta+3\alpha \end{array}\right.$

La dernière équation est soit incompatible soit inutile.($\gamma+2\alpha-\beta=0$)

Si $\gamma+2\alpha-\beta\neq 0$ alors le système est incompatible il n'y a pas de solution.

Si $\gamma+2\alpha-\beta=0$ alors le système est sous déterminé il y a une infinité de solutions:

$\left\{\begin{array}{l} x=\alpha+3\left(\beta-3\alpha+7z\right)/11-2z \\ y=\left(\beta-3\alpha+7z\right)/11 \\ z=z \end{array}\right.$

Ainsi les réponses sont les suivantes:

a) $\gamma+2\alpha-\beta\neq 0$.

b) Impossible.

c) $\gamma+2\alpha-\beta=0$.

Exercice 2:

Dans cet exercice, on appliquera la définition (ce qui fait un entrainement à la résolution de système) avant d'expliquer les méthodes plus rapides.

(i)

a) D'après la définition de la liberté de vecteurs: V_i sont libres ssi $\sum \alpha_i V_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow \forall i : \alpha_i = 0$.

Soient a,b,c des rééls tels que:

$a.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a+2b+3c=0 \\ a+2b+c=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b+c=0 \\ 2a+2b+3c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b+c=0 \\ -2b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b+c=0 \\ -2b+c=0 \\ c=c \end{array}\right.$ La famille n'est donc pas libre puisqu'il y a d'autres solutions que la solution $(a,b,c)=(0,0,0)$ (Par exemple $c=1, b=1/2, a=-2$ d'après le système, vérification $-2.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Autre méthode: on a 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ils sont donc forcément liés.

b) Soit $\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ déterminons les coordonnées de ce vecteur.

$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+2\beta+3\gamma \\ \alpha+2\beta+\gamma \end{pmatrix}$ On résoud...

$\left\{\begin{array}{l} \alpha+2\beta+\gamma=y \\ 2\alpha+2\beta+3\gamma=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+2\beta+\gamma=y \\ -2\beta+\gamma=x-2y \end{array}\right.$ On voit qu'il n'y a pas unicité de la décomposition ce qui est normal puisque la famille n'est pas libre. On peut prendre par exemple $\gamma=0, \beta=y-x/2, \alpha=x-y$.

Vérification: $\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-x/2)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}$ OK!!!

La famille est donc, bien sûr, génératrice.

Autre méthode:

Les 2 premiers vecteurs sont libres entre eux car ils ne sont pas proportionnels, ils engendrent donc à eux deux un sous espace vectoriel de dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$ donc ils engendrent $\mathbb{R}^2$ tout entier. Finalement $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice donc a fortiori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussi.

c) La famille n'étant pas libre, ce n'est pas une base.

d) Le rang est de 2 d'après la question b).

(ii)

a) Soient a et b tels que $a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a + 2b = 0 \\ a + b = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$

Donc la famille est libre.

Autre méthode:

Les vecteurs n'étant pas proportionnels ils sont libres.
b) Soit un vecteur de $\mathbb{R}^3$ essayons de le décomposer sur la famille...

$$\begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a + 2b = x \\ a + b = y \\ b = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{3}(x - 2z) \\ a = y - z \\ b = z \end{array} \right.$$

Le système n'admet de solution que si $\frac{1}{3}(x - 2z) = y - z$ il n'y a donc que les vecteurs vérifiant cette équation qui peuvent être générés par cette famille de vecteur. La famille n'est donc pas génératrice puisque tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne peuvent pas être décomposés sur cette famille.

Autre méthode:

On a 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ils ne peuvent donc pas générer $\mathbb{R}^3$, au mieux ils engendrent un espace de dimension 2 (ce qui d'ailleurs est le cas puisqu'ils sont libres).

c) La famille n'étant pas génératrice, elle n'est pas une base.

d) La famille étant libre elle engendre un sous espace vectoriel de dimension 2. Le rang est donc de 2.

(iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Soient a,b et c des réels tels que $a. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 2c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2c = 0 \\ b - 3c = 0 \\ b - 6c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2c = 0 \\ b - 3c = 0 \\ -3c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

La famille est donc libre.

b) Soit (x, y, z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$, cherchons a, b et c tels que

$$a.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 2c = x \\ 2a + b + c = y \\ 3a + b = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2c = x \\ b - 3c = y - 2x \\ b - 6c = z - 3x \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2c = x \\ b - 3c = y - 2x \\ -3c = z - x - y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = (x - 2y + 2z)/3 \\ b = -x + 2y - z \\ c = (x + y - z)/3 \end{array} \right.$$

Ainsi en effet tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose sur la famille et la famille est bien génératrice.

Autre méthode:

La famille contient 3 vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ elle génère un sous espace vectoriel de dimension 3 par conséquent $\mathbb{R}^3$ tout entier. La famille est donc génératrice.

c) La famille étant libre et génératrice, c'est une base.

d) Comme la famille est libre et qu'elle contient 3 vecteurs, elle est de rang 3.

(iv)

a) Soient a et b tels que $a.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 3b = 0 \\ a + b\alpha = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + \frac{3}{2}b = 0 \\ b\,(\alpha - 3/2) = 0 \end{array} \right.$ Il y a deux cas possibles... Si $\alpha = 3/2$ le système admet une infinité de solutions et la famille n'est donc pas libre. Par contre si $\alpha \neq 3/2$ l'unique solution est $a = b = 0$ et la famille est libre.

Autre méthode:

Les vecteurs sont libres ssi ils ne sont pas proportionnels ce qui amène a la même conclusion.

b) Soit (x, y) un vecteur de $\mathbb{R}^2$ cherchons a et b tels que

$$a.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 3b = x \\ a + b\alpha = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + \frac{3}{2}b = x/2 \\ b\,(\alpha - 3/2) = y - x/2 \end{array} \right.$$

Si $\alpha = 3/2$ le système n'admet de solution que si $y - x/2 = 0$ donc la famille n'est dans ce cas pas génératrice.

Sinon on a $b = \frac{y-x/2}{\alpha-3/2}$ et $a = x/2 - 3\frac{y-x/2}{2\alpha-3}$ et la famille est génératrice.

Autre méthode:

On a 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ pour que cette famille soit génératrice, il faut et il suffit qu'elle soit libre. Donc la famille est génératrice si et seulement si $\alpha \neq 3/2$.

c) Si $\alpha = 3/2$ la famille n'est ni libre ni génératrice donc ce n'est pas une base.

Si $\alpha \neq 3/2$ la famille est libre et génératrice: c'est donc une base.

d) Si $\alpha \neq 3/2$ la famille est une base donc elle est de rang maximal soit 2.

Si $\alpha = 3/2$ la famille est de rang inférieur strict à 2. Comme $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre un sous espace de dimension 1. Le rang de la famille est au moins de 1 donc finalement le rang est de 1 dans ce cas.

Exercice 3:

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b+2c=2 \\ a+b+c=2 \\ a=3 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+2c=2 \\ b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+2c=2 \\ -c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$

   Vérification: $3.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ OK.

2. Trouver une base des sous espaces (vectoriels ou affines) suivants et faire une représentation graphique:

   (i) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z/2 \\ y=-z/2 \\ z=z \end{cases}$

   $E = \{(z/2, -z/2, z)\,|z \in \mathbb{R}\} = z.\,(1/2, -1/2, 1)$

   Graphiquement, il s'agit donc de la droite dirigée par le vecteur $(1/2, -1/2, 1)$ et passant par l'origine.

   (ii)$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y/2-z/2=1 \\ -y/2-z/2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \\ z=z \end{cases}$

   $E = \{(1,0,0) + (z, -z, z)\,|z \in \mathbb{R}\} = (1,0,0) + z.\,(1,-1,1)$

   Graphiquement, il s'agit donc de la droite parallèle au vecteur $(1,-1,1)$ et passant par le point $(1,0,0)$.

   (iii) $x-y-z=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y+z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$

   $E = \left\{(1,0,0) + (y+z, y, z)\,|\,(y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = (1,0,0) + y.\,(1,1,0) + z\,(1,0,1)$

   Graphiquement, il s'agit du plan passant par le point $(1,0,0)$ et parallèle au plan passant par l'origine et de directions les vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,0,1)$.

   Une autre façon de construire le plan: $x-y-z=1$ il s'agit d'un plan parallèle au plan perpendiculaire au vecteur $(1,-1,-1)$. De plus, il passe par le point $(1,0,0)$.