

Temps: 45 minutes Calculatrices interdites

Jusifier toutes vos réponses.

**Exercice 1**

Soit  $f(x, y, z) = (-3x + 2y + z, x - y - z, 4x - 2y)$

- 1) Déterminer le noyau de l'application linéaire  $f$ ,  $\text{Ker}(f)$  puis une base de  $\text{Ker}(f)$ .
- 2) Déterminer le rang de  $f$ ,  $\text{rang}(f)$ .
- 3) En déduire si l'application est injective, surjective ou bijective.
- 4) Donner la matrice représentative de  $f$ .
- 5) La famille des vecteurs  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
  - a) est-elle libre?
  - b) est-elle génératrice?
  - c) est-elle une base?

**Exercice 2**

Pour tout nombre réel  $m$ , on considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} -m & 2 & -m \\ 1 & 0 & m \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On note  $f_m$  l'application linéaire ayant  $A_m$  comme matrice dans la base canonique.

- 1) Calculer le déterminant de  $A_m$  en fonction de  $m$ .
- 2) Pour quelles valeurs de  $m$  la matrice est-elle inversible?
- 3) Quel est le rang de  $f_2$ ?
- 4) Déterminer le rang de  $A_m$  pour chaque valeur de  $m$ .
- 5) Calculer l'inverse de  $A_1$ .
- 6) En déduire les solutions du système suivant:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = -1 \\ x + z = 5 \\ 3y + 3z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-3x + 2y + z = 0$$