Chapitre 3 : Application linéaire

7 Introduction

Définition 7.1
On appelle ***application*** *de E dans F une relation qui à chaque élément de E associe un et un seul élément de F. Une application se note généralement :*

$$f : \begin{cases} E \to F \\ X \mapsto f(X) \end{cases}$$

L'image de $X \in E$ se note donc $f(X) \in F$.

Définition 7.2
On dit qu'une application $f : E \to F$ est ***surjective*** *si tout élément de F admet (au moins) un antécédent par f.*

Autrement dit, f est surjective $\Leftrightarrow_{Def} \forall Y \in F, \exists X \in E$ tel que $f(X) = Y$.

Définition 7.3
On dit qu'une application $f : E \to F$ est ***injective*** *si tout élément de F admet au plus un antécédent par f.*

Autrement dit, f est injective $\Leftrightarrow_{Def} \forall \left(X, X'\right) \in E^2, f(X) = f\left(X'\right) \Rightarrow X = X'$.
Attention cela ne veut pas dire que tout élément de F admet un antécédent...

Définition 7.4
On dit qu'une application $f : E \to F$ est ***bijective*** *si tout élément de F admet exactement un antécédent par f.*

Autrement dit, f est bijective $\Leftrightarrow_{Def} \forall Y \in F, \exists! X \in E$ tel que $f(X) = Y$.

On peut facilement montrer qu'une application est bijective si et seulement si elle est surjective et injective.

8 Application linéaire

Définition 8.1
Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K, alors $u : E \to F$ est une ***application linéaire*** *si :*

(i) $\forall (X, Y) \in E^2 : u(X+Y) = u(X) + u(Y)$.
(ii) $\forall (\alpha, X) \in K \times E : u(\alpha.X) = \alpha.u(X)$.

Littéralement, cela veut dire qu'une application est linéaire si :
(i) L'image de la somme est la somme des images.
(ii) L'image du produit par un scalaire est

le produit du scalaire par l'image.
On utilise cependant plus souvent la définition équivalente suivante :

Proposition 8.1
$u : E \to F$ est une application linéaire si et seulement si :
$\forall (\alpha, \beta) \in K \times K$ *et* $\forall (X, Y) \in E^2$:
$u(\alpha X + \beta Y) = \alpha u(X) + \beta u(Y)$.

Littéralement, cela veut dire qu'une application est linéaire si et seulement si l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Remarque :
En particulier une condition nécessaire pour que u soit linéaire est que $u\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$.
En effet, $u\left(\overrightarrow{0_E}\right) = u(0.x) = 0.u(x) = \overrightarrow{0_F}$.

Exercice :
Montrez que l'image de p vecteurs linéairement

dépendants de E par une application linéaire constitue une famille de p vecteurs linéairement dépendants de F.

Définition 8.2

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

- *Si $u \in L(E, F)$ est bijective, on dit que u est un* ***isomorphisme*** *de E dans F.*
- *Si $u \in L(E, E)$, on dit que u est un* ***endomorphisme*** *de E ; si elle est de plus bijective on dit que c'est un* ***automorphisme****.*
- *Enfin une application linéaire de E dans K est appelée forme linéaire sur E.*

Proposition 8.2

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies alors, $L(E, F)$ est un K-espace vectoriel de dimension égale à

$\dim(E) * \dim(F)$.

8.1 Image et rang d'une application linéaire

Définition 8.3

Soit $u \in L(E, F)$, on appelle ***image de u*** *la partie de l'ensemble d'arrivée F qui est composée des images de vecteurs de E.*

$Im(u) = u(E) = \{u(X) | X \in E\}$.

$Im(u) = \{Y \in F \mid \exists X \in E \text{ tel que } u(X) = Y\}$

Proposition 8.3

L'image de u est un sous-espace vectoriel de F.

Définition 8.4

Le ***rang de u*** *est la dimension de l'image de u :*

$Rang(u) = \dim(Im(u))$ (= nombre de vecteurs de base de $Im(u)$).

On peut ici voir le lien entre rang d'une famille de vecteurs et rang d'une application linéaire. En effet, le rang d'une application linéaire est tout simplement égal au rang de la famille de vecteurs formée par les images d'une base, et ce quelle que soit la base choisie. Ainsi pour calculer le rang on prendra généralement la base canonique de E dont on calculera les images par u, et il suffira alors de calculer le rang de la famille de vecteurs ainsi constituée.

Exemple 11

Calculez le rang de l'application linéaire suivante :

$u(x,y) = (x+y, x-y, x)$.

Proposition 8.4

*u est **surjective** si et seulement si*

$$\mathit{Rang}\,(u) = \dim(F).$$

Remarquons que pour qu'une application puisse être surjective, il faut que $\dim(F) \leq \dim(E)$. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

8.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 8.5

*Le **noyau** d'une application linéaire noté* $\ker(u)$ *est l'ensemble de vecteurs de E dont l'image est le vecteur nul de F :*

$\ker(u) = \left\{ X \in E \,|\, u(X) = \overrightarrow{0_F} \right\}$.

Proposition 8.5

Le noyau $\ker(u)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 8.6

*u est **injective*** $\Leftrightarrow \ker(u) = \left\{ \overrightarrow{0_E} \right\}$.

8.3 Théorème du rang

Proposition 8.7 (Théorème du rang)

Soit $u : E \to F$ *une application linéaire alors :* $\dim(\ker(u)) + Rang(u) = \dim(E)$.

Preuve

La preuve de ce théorème est basé sur la construction d'une base à partir des antécédents d'une base de l'image complétée par une base du noyau.

Soit $(f_1, ..., f_p)$ *une base de l'image de* u *alors par définition elle contient* $rang(u)$ *vecteurs. De plus, il existe* $e_i \in E$ *tels que* $u(e_i) = f_i$. *Nous avons montré en exercice que l'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée. Nous pouvons immédiatement en déduire que les antécédents d'une famille libre est une famille libre. La famille* $(e_1, ..., e_p)$ *est donc libre.*

Nous la complétons avec une base du noyau qui contient donc par définition $\ker u$ *vecteurs :* $(e_{p+1}, ..., e_m)$.

Il nous reste à montrer que cette famille est une base de E :

Famille Libre :

Soit a_k *des scalaires tels que* $\sum_{k=1}^{m} a_k.e_k = \overrightarrow{0}$ *alors* $u\left(\sum_{k=1}^{m} a_k.e_k\right) = u\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$.

Par linéarité nous en déduisons que : $\sum_{k=1}^{m} a_k.u(e_k) = \overrightarrow{0_F}$. *Or pour* $k > p$ $e_k \in \ker u$ *donc* $u(e_k) = \overrightarrow{0_F}$ *et pour* $k \leq p$ $u(e_k) = f_k$. *Ainsi* $\sum_{k=1}^{p} a_k.f_k = \overrightarrow{0_F}$ *or* $(f_1, ..., f_p)$ *est une base de l'image donc c'est une famille libre ceci implique donc* $\forall k \leq p : a_k = 0$. *Donc* $\sum_{k=1}^{m} a_k.e_k =$

$\sum\limits_{k=p+1}^{m} a_k.e_k = \overrightarrow{0_E}$ *or la famille* $(e_{p+1}, ..., e_m)$ *est une base du noyau donc c'est une famille libre et on en déduit que* $a_{p+1} = ... = a_m = 0$.

Conclusion : $\forall k \in 1..m : a_k = 0$ *ce qui signifie que la famille* $(e_1...e_m)$ *est libre.*

<u>Famille Génératrice :</u>

Soit $X \in E$ *alors* $u(X) \in Im(u)$ *donc il existe* $(a_1, ..., a_p)$ *des scalaires tels que* $u(X) = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k.u(e_k)$ *puisque* $\big(u(e_1), ..., u(e_p)\big)$ *est une base de l'image.*

Par linéarité on en déduit que $u(X) - \sum\limits_{k=1}^{p} a_k.u(e_k) = u\left(X - \sum\limits_{k=1}^{p} a_k.e_k\right) = \overrightarrow{0_F}$

Donc $X - \sum\limits_{k=1}^{p} a_k.e_k \in \ker u$ *or* $(e_{p+1}, ..., e_m)$ *est une base du noyau donc ils existent*

$(a_{p+1}, ..., a_m)$ *tels que*

$$X - \sum_{k=1}^{p} a_k.e_k = \sum_{k=p+1}^{m} a_k.e_k \quad (\star)$$

Conclusion : ils existent $(a_1, ..., a_m)$ *des scalaires tels que* $X = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k.e_k$ *d'après* $(\star)$ *et la famille* $(e_1...e_m)$ *est bien génératrice.*

La famille $(e_1...e_m)$ *est donc une base de E, elle contient par définition* $Rang(u) + \dim(\ker(u))$ *vecteurs or toute base de E contient* $\dim E$ *vecteurs donc* $\dim(E) = Rang(u) + \dim(\ker(u))$.

Ce théorème est très pratique par exemple pour calculer le rang.
On commence par calculer le noyau, et en utilisant la formule, on obtient :
$Rang\,(u) = \dim\,(E) - \dim\,(Ker(u))$.

8.4 Représentation matricielle d'une application linéaire (a.l.)

Soit u une application linéaire de $E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}^n$.

Soient $\left(e_1, e_2, ..., e_p\right)$ une base de E et $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F.

Alors on peut décomposer les images de la base de E de façon unique sur la base de F, on a donc :

$u\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.f_i.$

Proposition 8.8

Si l'on connaît tous les a_{ij} pour $i = 1...n$ et $j = 1...p$, alors on peut entièrement définir u pour tout $X \in E$ et réciproquement.

Pour représenter une application linéaire, on peut donc utiliser une forme matricielle avec n lignes et p colonnes :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1p} \\ a_{21} & & & & a_{2p} \\ ... & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{np} \end{bmatrix}$$

M est dite d'ordre $n * p$ (ligne puis colonne) et on note $M_{(n,p)}$.

Remarque :

$M = \begin{bmatrix} u\left(e_1\right) & u\left(e_2\right) & ... & u\left(e_p\right) \end{bmatrix}$ où $u\left(e_i\right)$ correspond à la décomposition vectorielle de l'image de e_i sur la base de F.

Lien entre l'application linéaire et sa matrice rep. :

$u\left(x, y, z\right) = M.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Il faut bien sûr que les coordonnées (x, y, z) correspondent aux coordonnées dans la base de départ et le vecteur colonne résultat correspond aux coordonnées de l'image dans la base d'arrivée choisie pour M.

En général et si rien n'est spécifié il faut prendre les bases canoniques au départ et à l'arrivée. Dans ce cas les coordonnées du vecteur $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont bien sûr $(x_1, x_2, ..., x_n)$ puisque
$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1.(1, 0, ..., 0) + x_2.(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, ..., 0, 1)$.
Ainsi l'égalité précédente est directe et il n'y a aucun calcul de coordonnées à faire.

Exemple 12
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$u(x, y) = (2x, x + 2y, y)$.

On prend les bases canoniques des ensembles de départ et d'arrivée.

La base de départ est donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$u(1, 0) = (2, 1, 0)$ *et* $u(0, 1) = (0, 2, 1)$

La base d'arrivée est la base canonique donc :

$$u(1,0) = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

u est donc représentée par :

$$M = [u(1,0) ; u(0,1)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

REMARQUE IMPORTANTE :
Il est important de noter que la définition traditionnelle des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ fait intervenir une écriture en ligne avec donc des vecteurs "lignes". Cependant, lorsque l'on passe à la vision matricielle de l'application il est important de n'utiliser que des vecteurs colonnes.

Exemple 13

$f(x, y) = (y, 2x, x - 3y)$.

1) Calculez M la matrice représentative de f avec comme base de départ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *et comme base d'arrivée la base canonique.*

2)Calculez l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *par la méthode matricielle. Pour cela on calculera d'abord les coordonnées de ce vecteur pour la base choisie pour l'espace de départ.*