Compléments sur le chapitre 5 : l'inversion de matrices

Exemple 27 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 0 = -6 \neq 0$$

donc M est inversible.

$$Co(M) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

d'où $${}^tCo(M) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot {}^tCo(M) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Vérification : A-t-on $M \cdot M^{-1} = I$?

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{6} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & 1 - 1 & \frac{2}{6} - \frac{1}{3} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Exercice :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ -x + y = 2 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot X = b \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\det(A) = 1+2 = 3 \neq 0$ et $A_{(2,2)}$ donc carrée, on peut donc appliquer la méthode de Cramer.

On a : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{array}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ \frac{L_2}{3} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{array}$

Les solutions sont donc $(x ; y) = (-1 ; 1)$.

Vérification : $(1) \Rightarrow x = 1 - 2y$

$(2) \Rightarrow -1 + 2y + y = 2 \Leftrightarrow 3y = 3 \Leftrightarrow y = 1$

et $(1) \Rightarrow x = 1 - 2 \times 1 = -1$.

non

- Méthode de la matrice inverse :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2+L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ \frac{L_2}{3} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1-2L_2 \\ L_2 \end{array}$$

d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Les solutions du système sont $X = A^{-1} b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $(x, y) = (-1 ; 1)$. $\boxed{}$

Exemple 29 :

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = 1 \\ x + 3z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot X = b \text{ où } A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Utilisons la méthode de Cramer :

- $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc A est inversible et le système admet une solution unique.

- $x = \dfrac{\det(B_1)}{\det(A)} = \dfrac{\begin{array}{ccc} b & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = \left(\dfrac{3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}{1} \right.$

$\left. = 3 \times 3 + 2 \times (-6) = 9 - 12 = -3. \right) = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 9 - 12 = -3$

$$y = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{array}{ccc} c_1 & b & c_3 \\ \hline \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1}$$

$$= 3 - 6 + 3 - 2 = -2.$$

$$z = \frac{\det(B_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & b \\ \hline \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 3 = 3$$

D'où $(x, y, z) = (-3 ; -2 ; 3)$.